H. Völz

Exponentialfunktion und Logarithmus in Naturgesetzen

Zusammenfassung

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus sind uns heute selbstverständlich. Doch Ihre Begründung und Entstehung sind schwer zurückzuverfolgen. Der vorliegende Text ist ein Versuch, der zugleich aufzeigt, wie häufig sie in Naturgesetzen vorkommen. Wahrscheinlich ist dies auch der Grund, dass der Logarithmus für unsere Sinneswahrnehmungen gilt.

Bereits für Schüler sind heute die Exponential- und Logarithmusfunktion selbstverständlich. Sind sie doch auf allen etwas besseren Taschenrechnern unmittelbar nutzbar. Doch wie sie entstanden und welche Gründe es für ihr Entstehen gab, entzieht sich weitgehend sogar der zuständigen geschichtlichen Fachliteratur. Doch die Schwierigkeiten beginnen bereits dort, wo nach der Bedeutung (Semantik) von Formeln in der Physik gefragt wird. Doch auch hierzu ist die Literatur vergleichsweise rar. Die auch noch heute wichtigsten Fakten dazu enthält das bereits etwa fünfzig Jahre alte Buch von Hubert Schleichert [1]. Im Kontext dieser Ausführung sind zwei Aussagen zur ***inhaltlichen Interpretation*** (Semantik) wichtig, die stark von der langläufigen Auffassung abweichen und daher anschließend kurz begründet werden:

1. Von den mathematischen Operationen sind nur die **Addition** und **Subtraktion** physikalisch interpretierbar.
2. Alle Messgrößen der Physik sind **diskret** mit endlicher Stellenzahl (rational) und nicht kontinuierlich.

Zu 1.: Bei Stäben ist es z.B. möglich, die Längen zu vergleichen und dabei zwischen länger, kürzer und (annähernd) gleich zu unterscheiden. Auch lassen sich Längen offensichtlich addieren bzw. subtrahieren. Diese Operationen sind dabei prinzipiell, wenn auch nicht praktisch unendlich oft wiederholbar. Doch generell ist die Addition nicht für alle physikalische Größe möglich. Ein Beispiel ist die Temperatur. Um sie anzuwenden, muss für die Größe zumindest eine Intervall-Skala definiert sein. Zur physikalischen Einführung der Multiplikation könnte man nun davon ausgehen, dass sie z.B. bei der Länge zur Fläche führt. Doch dies ist ein Trugschluss, denn erstens hat die Fläche eine andere Bedeutung (Maßeinheit) und zweitens ist die Multiplikation bestenfalls wenige Male wiederholbar. Das gilt ähnlich für alle anderen Größen. Andererseits kann die Multiplikation als Maßstabsänderung angesehen werden Unabhängig von einer Interpretation lassen sich mit ihr über Konstanten jedoch neue Ausdrücke definieren. Dies gilt u.a. für die Vorsatzzeichen des System International, wie k, M, μ und n.

Zu 2. Das Kontinuum betrifft reelle (irrationale) Zahlen und besagt, dass immer zwischen zwei beliebigen Zahlen eine weitere Zahl liegt. Dieser Prozess ist unendlich oft fortsetzbar. In der Messtechnik sind Messungen jedoch nur endlich oft wiederholbar. Außerdem kann bereits rein technisch – d.h. auch unabhängig von der Heisenberg-Unschärfe – eine Messung nur eine endliche Stellenzahl erreichen. Messergebnisse führen daher immer zu rational darstellbaren Zahlenwerten. Prinzipiell wären sie sogar mittels natürlicher Zahlen darzustellen. Doch für eine mathematisch formulierte Theorie ist dieser Weg sehr ineffektiv. Der Übergang zu kontinuierlichen Werten besitzt daher rein formalen Charakter und dient nur einer besser formulierbaren und abgeschlossenen Theorie. Kontinuität lässt sich folglich niemals experimentell nachweisen, wohl aber eine Unstetigkeit, sofern sie größer als die Messgenauigkeit ist. Nebenbei sei erwähnt, dass z.B. auch die Primzahlen keine experimentelle Entsprechung (Interpretation) besitzen.

Unter diesen beiden Begrenzungen besteht kaum eine Hoffnung, den Logarithmus und die Exponentialfunktion im Rahmen der Physik inhaltlich zu interpretieren. Daher dürften sie auch kaum in diesem Kontext entstanden sein. Hier werden gemessene Größen durch ihren Zahlenwert und ihre Maßeinheit angegeben. In brauchbarer Näherung entspricht dabei die Maßeinheit einer Interpretation des Ergebnisses. Etwas schwieriger sind daher Aussagen zu ***einheitenfreien Größen***[1], wie z.B. die Anzahl der Atomlagen oder die Windungen einer Spule. Doch auch aus rein mathematischer Sicht gibt es kaum Begründungen für das Entstehen vom Logarithmus und der Exponentialfunktion. Im Gegensatz zur Subtraktion mit negativen Zahlen, der Division mit rationalen Zahlen und dem Wurzelziehen mit irrationalen Zahlen führen sie nämlich zu keiner neuen Zahlenklasse.

Wiederholung und Exponentialfunktion

Die Wiederholung von Ereignissen und Prozessen kommt in der Natur recht häufig vor. Als Beispiele seien nur der Tag-Nacht-Wechsel und die Jahreszeiten (bedingt durch Rotation) sowie die Atmung und der Pulsschlag genannt. Hieraus folgen nahezu unmittelbar die harmonischen Funktionen, wie ***Sinus*** und ***Kosinus***. Sie sind – sofern man von den o.g. physikalisch diskreten Messergebnissen absieht – auch kontinuierlich verständlich. In der Mathematik lassen sich durch Wiederholung höhere Operationen erzeugen. Die wiederholte Addition führt zur Multiplikation, die wiederholte Multiplikation zur Potenzierung. Doch auf diese Weise sind diese Operationen nur *ganzzahlig* und nicht rational oder schon gar nicht kontinuierlich definiert. Dennoch ermöglichen sie – wie bereits oben gezeigt – kaum eine physikalische Interpretation. Zuweilen ist sie jedoch für die o.g. einheitenfreien Größen möglich. Ein Beispiel ist die Vermehrung von Lebewesen bezüglich Generationsfolgen (einfache ***Wachtumsfunktion***). In einer Generation mögen y Lebewesen existieren, die jeweils während ihre Lebenszeit a-mal soviel Nachkommen erzeugen. Bei einer Startanzahl y_0 existieren dann nach x (ganzzahlig) Generationen

$$y_n = y_0 \cdot a^x.$$

Ganz analog gilt dieser Zusammenhang auch für die ***Zinseszins-Rechnung*** über x Jahre. y_0 bedeutet dann das Anfangskapital. Mit einem Prozentsatzes p je Jahr gilt $a = 1+p/100$. Zuweilen wird angenommen, dass auf dieses Grundlage die ***Eulersche Zahl*** e ≈ 2,718281828459045 entstanden sei. Für ganzzahlige n gilt nämlich

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Die Geschichte von e ist nicht eindeutig geklärt. Sie reicht bis ins 16. Jh. Zurück. Auf alle Fälle ist sie die erste Zahl, die nur durch einen Grenzwert definiert werden kann. Einige Zeit galt sie daher Kuriosität. Aus verschiedenen und z.T. nicht unmittelbar einsichtigen Gründen wurde sie 1727 von LEONHARD EULER[2] (1707 - 1783) eingeführt. Heute kann sie auf vielfältige Weise, jedoch immer nur als Grenzwert definiert werden, z.B.:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \text{ oder als unendliche Reihe } \mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} .$$

[1] Zuweilen wird hier auch das Bit eingeordnet. Aus anderer Sicht ist es eine spezielle Maßeinheit.
[2] Allgemein wird angenommen, dass e von LEONHARD EULER (1707 – 1783) nicht aus Eitelkeit eingeführt wurde, sondern einfach weil die Buchstaben a bis d in der Mathematik sehr vielfältig benutzt wurden und daher e der erste frei verfügbare Buchstabe war. Eventuell ist auch der Bezug zu **e**xponentiell möglich. Der Ursprung ist lateinisch exponare was öffentlich, ausstellen, darlegen, preisgeben bedeutet. Der Begriff „Exponent" wurde 1554 von MICHAEL STIFEL (auch Styfel oder Stieffel) (ca. 1487 - 1567) eingeführt. Ferner sei der Bezug zu Exponat (Ausstellungsstück) genannt.

Neben π ist e heute die wichtigste transzendente[3] Zahl. Sie kommt in vielen Anwendungen und mathematischen Formeln vor und hat so fundamentalen Charakter erlangt. Wichtig war dabei die mit ihr mögliche Quadratur der Hyperbel und die Entwicklung der Infinitesimalrechung, insbesondere durch ISAAC NEWTON (1643 – 1727) ab 1671 und GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) ab 1675. Hierbei wurde die einzigartige Eigenschaft der Exponentialfunktion e^x deutlich. Sowohl bei der Integration als auch bei der Differentation ergibt sich wieder e^x:

$$\mathrm{d}e^x/\mathrm{d}x = e^x \text{ und } \int e^x \cdot \mathrm{d}x = e^x + C.$$

Wichtig ist noch, dass sich durch sie auch die Potenzierung recht einfach realisieren lässt:

$$y = a^x = e^{bx} \text{ mit } b = \ln(a).$$

Diese Beziehung gilt für reelle (kontinuierliche) Werte von x, a ($> 0, \neq 1$) und y (> 0). All diese Fakten ermöglichen jedoch keine physikalische Interpretation.

Zusammenhang mit der Rekursion

Eine Iteration (Wiederholung) kann auch mittels eines ***rekursiven*** Algorithmus beschrieben werden. Als Beispiel sei die folgende Beziehung mit einen Faktor $a > 0$ gewählt:

$$y := y \cdot a$$

Nach x-facher (x ganzzahlig) Rekursion und einem Startwert y_0 ergibt sich dann (vgl. oben)

$$y_x = y_0 \cdot a^x.$$

Je nach der Größe von a sind drei Fälle zu unterscheiden:

- $0 < a < 1$: y_x konvergiert gegen 0
- $a = 1$: Es gilt immer $y_x = y_0$
- $a > 1$: y_x divergiert gegen ∞

Dabei gilt immer $y_{x+1}/y_x = a$. Andererseits hängt der lineare Abstand $d = y_{x+1} - y_x$ sowohl von a als auch von x bzw. y ab, vgl. die Punkte in **Bild 1a**. Ein typisches Beispiel ist die wohltemperierte Tonleiter mit $a = \sqrt[12]{2} \approx 1,05946$. Mittels der Exponentialfunktion und $\beta = \ln(a) \approx 0,05776$ gilt dann für den n-ten Ton $f_n = f_0 \cdot e^{n \cdot \beta}$. Wird die Folge der y_x durch eine glatte Kurve genähert, so ergeben sich mit Ausnahme von $a = 1$ Potenz- bzw. Exponentialfunktionen. Jedoch eine physikalische Interpretation ist auch so nicht möglich. Es sei denn – wie oben angeführt – man betrachtet die Kurven nur im Sinne einer mathematischen Vereinfachung. Jedoch ist zu ergänzen, dass dann die Potenz- bzw. Exponentialfunktion zusätzlich auch für negative x definiert wird (Bild 1b).

---

[3] Erst 1873 bewies CHARLES HERMITE (1822 - 1901) die Transzendenz von e. Dies bedeutet, dass sie nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung endlichen Grades $a_0+a_1x+a_2x^2+ ... = 0$ zu gewinnen ist. Die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ ist dagegen ersichtlich nicht transzendent ($2 = x^2$).

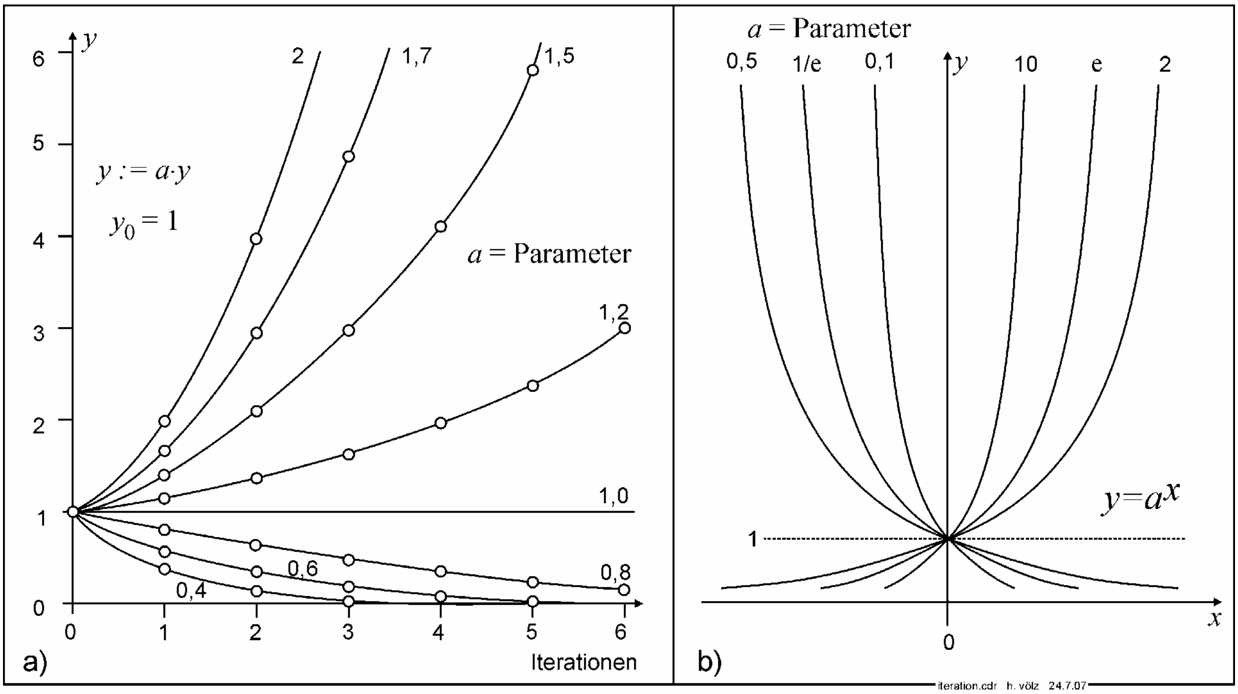

Bild 1. Iteration (a) und Potenz- bzw. Exponentialfunktion (b).

Naturgesetze

Eine deutliche Mehrzahl der Formeln aller Naturgesetze ist recht einfach. Extrem einfach ist die Proportionalität mit einer Konstanten c gemäß $y = c \cdot x$. Sie tritt insbesondere dann auf, wenn ein Zahlenwert in eine andere Maßeinheit umgerechnet werden soll, z.B. von Inch auf cm. Ein weiters Beispiel betrifft die Kreisfrequenz ω bzgl. der Drehzahl f also $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$. Recht häufig werden in Formeln zwei unabhängige Variablen x_1 und x_2 entsprechend $y = x_1 \cdot x_2$ benutzt. Beispiele hierfür sind das Ohmsche Gesetz und die Wirkung der Beschleunigung:

$$U = I \cdot R \text{ bzw. } F = m \cdot b.$$

Darin beuten U Spannung, I Strom, R Widerstand, m Masse, F Kraft und b Beschleunigung. Durch Umformung derartiger Gleichungen – der Auflösung nach einer anderen Größe – kommt auch die Division vor $I = U/R$ und $b = F/m$ zur Anwendung. Multiplikationen und Division verknüpfen dabei unterschiedliche physikalische Größen und liefern als Ergebnis eine dritte Größe. Sie verknüpfen somit Zahlenwerte mit unterschiedlichen Maßeinheiten. Daher ermöglichen diese Formeln auch keine physikalische Interpretation der Operationen (s.o.). Komplexere Formeln enthalten das Quadrat einer Messgröße, z.B. für die kinetische Energie bzgl. der Geschwindigkeit v oder beim Coulomb-Gesetz für die Kraft zwischen den Ladungen Q_1 und Q_2 bzgl. der reziproken Entfernung r:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}.$$

Beim Coulomb-Gesetz ist zusätzlich ein Faktor mit der Dielektrizitätskonstanten ε erforderlich. Bei der Auflösung nach anderen physikalischen Größen tritt auch die Quadratwurzel auf. Ein Beispiel ist Resonanzfrequenz ω eines elektrischen Schwingkreises aus Induktivität L und Kapazität C

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

Der Übergang zur Exponentialfunktion erfolgt meist, wenn sich Prozesse und Erscheinungen wiederholen. Wird z.B. in einer ***Schichtdicke*** d eine relative Energie α absorbiert, so wird in der n-fachen Dicke α^n absorbiert. Dies ähnelt dem Bild 1a. Werden dann differentiell dünne Schichten angenommen, so ergibt sich mit einer Dämpfungskonstanten μ und der Anfangsenergie E_0 über die Integration die verfügbare Energie zu

$$E = E_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}.$$

Diese Beziehung gilt u.a. auch für die Dämpfung infolge des ***Abstandes*** d zwischen einem Magnetkopf und der Magnetschicht oder für die Zunahme des mechanischen Reibungswiderstands um eine rotierende Welle bezüglich des Winkels φ. Auch die barometrische Höhenformel ist hier einzuordnen. Statt der Energie tritt dann der Druck p und statt der Dicke die Höhe h auf: $p = p_0 \cdot e^{-\alpha \cdot h}$. Die Konstante $\alpha \approx {}^1/_8$ km gilt ohne Berücksichtigung des Temperaturganges.

Viele Prozesse ähnlicher Art laufen auch in der ***Zeit*** ab. Dies gilt z.B. für die Radioaktivität. Innerhalb der Halbwertszeit $T_{1/2}$ sinkt die Anzahl der noch unzerfallenen Atome x auf die Hälfte. Mit der Anfangszahl x_0 und der Zerfallskonstanten $\lambda = \ln(2)/T_{1/2} \approx 0{,}693/T_{1/2}$ folgt dann das Zerfallsgesetz

$$x = x_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Auch bei der Entladung eines Kondensators C über einen Widerstand R ist nach einer gewissen Zeit die verbleibende Spannung U immer ein bestimmter Anteil der zuvor vorhandenen. Mit einer Ausgangsspannung U_0 gilt daher

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Nicht so einfach sind die vielfach auftretenden Zusammenhänge bezüglich der ***absoluten Temperatur T*** und Energie E zu erklären. Bezüglich einer physikalischen Größe x, z.B. Diffusion, Sättigungsstrom einer Diode oder Reaktionsgeschwindigkeit der Arrheniusgleichung gilt dann (SVANTE AUGUST ARRHENIUS; 1859 – 1927)

$$x = x_0 \cdot e^{-\frac{E}{k \cdot T}}.$$

Hierin bedeuten k die Boltzmannkonstante (LUDWIG BOLTZMANN; 1844 – 1906) und x_0 einen Anfangswert. Infolge der Geschwindigkeit wird bei Arrheniusgleichung jedoch indirekt der Zusammenhang mit der Zeit sichtbar.

Zahlenbereiche

Schon sehr früh erkannten die Menschen, dass große Zahlen nicht einfach durch Zählen mit Strichen oder Ähnlichem zu erfassen sind. So schufen bereits die Ägypter um 3 000 v.Chr. spezielle Zeichen für 1, 10, 100 usw. (**Bild 2**) und setzten damit ihren Zahlen zusammen. Ihre Abstufung entspricht dabei dem dezimalen Exponenten der Zahlen. Recht früh entwickelte sich daher auch das Stellenwertsystem, so wie wir es heute bei der Zahlendarstellung durch die Ziffern 0 bis 9 verwenden: 257 bedeutet inhaltlich $2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$. Lediglich die Einführung der Null hat dabei recht lange – in Indien ab etwa 600 vorhanden – gedauert.

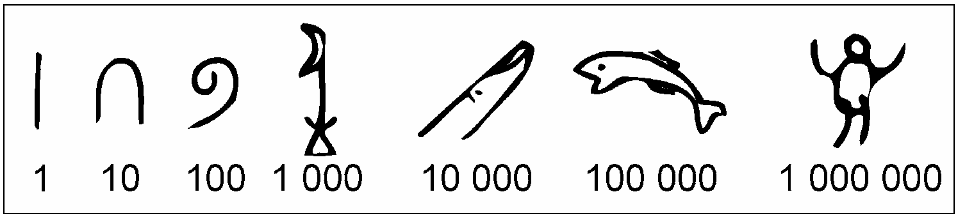

Bild 2. Hieroglyphen der alten Ägypter für größere Zahlenwerte.

Die größte Zahl des Altertums stammt von ARCHIMEDIS (287 – 212 v.Chr.). 215 v.Chr. berechnete er die Anzahl der Sandkörner – aus denen die Welt bestehen sollte – zu 10^{63} (Sandzahl). Spätestens im 19. Jh. bemerkten die Physiker, das alle Größen der Natur maximal einen Bereich von $1 : 10^{100}$ überstreichen. Diesen Umfang können wir nicht mehr unmittelbar geistig erfassen. Doch der Zahlenbereich wird noch deutlich größer, wenn die Möglichkeiten der Kombinatorik, z.B. der möglichen Zugzahl bei Spielen, einbezogen werden. Als Folge dieser und weiterer Fakten verwenden wir – ohne uns dessen immer bewusst zu werden – mehrere Teilbereiche mit unterschiedlicher Denkstrategie bzw. Skalen oder Maßstäben [3, 4]. Eine etwas vereinfachte Darstellung zeigt **Bild 3**, das durch **Tabelle 1**. ergänzt wird. Die in den Bereichen jeweils verwendeten Skaleneinteilungen ermöglichen es, die wichtigsten Anzahlen, Ereignisse, Zustände usw. einigermaßen gleichmäßig verteilt darzustellen. Hierbei wird von Skaleneinteilungen Gebrauch gemacht, die mehrfach und unterschiedlich den Logarithmus benutzen. Deshalb wird zuweilen auch davon gesprochen, dass die Menschen schon recht lange bei der Nutzung von Zahlen den Logarithmus indirekt einbezogen. Es sei aber darauf hingewiesen, dass es vielen recht schwer fällt, derartige Zusammenhänge zu begreifen und kreativ zu nutzen.

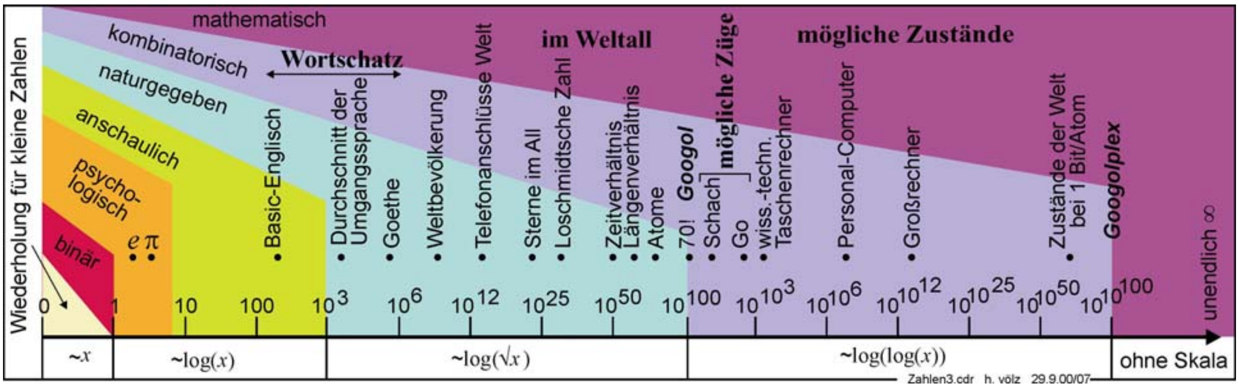

Bild 3. Übersicht zu den Zahlenbereichen und den vorteilhaften Skalen (ohne negative und komplexe Zahlen). Für sehr kleine Zahlen, u.a. Wahrscheinlichkeiten, wiederholt sich die Einteilung reziprok nach 10^{-3}, 10^{-100}, $(10^{-10})^{100}$ und $\to 0$ im gelb gezeichneten Bereich. Da e und π nicht ganzzahlig sondern transzendent sind, gehören sie auf Grund ihren unendlichen Stellenzahl eigentlich in den mathematischen Bereich!

Tabelle 1 Zur Definition der verschiedenen Zahlenbereiche.

Name	Beispiel für Bezug	Zahlenbereich
Binär	Logik	0, 1
Physiologisch	Gedächtnis	1, 2, ... 7 (±2)
Anschaulich	Vorstellung, Zählen	ca. 0,001 bis 1000
Naturgegeben	Natur, Kosmos	10^{-100} bis 10^{100}
Kombinatorisch	Spiele, Evolution	noch kleiner bzw. größer
Mathematisch	Theorie	$\varepsilon \to 0$ bzw. $n \to \infty$

Bevor einige Erklärungen zu den einzelnen Bereichen gegeben werden, sei noch erwähnt, dass sie nicht nur eigene Skalen und Denkstrategien besitzen sondern dass es auch Regeln für den Übergang zwischen ihnen gibt. Hierfür sei nur ein Beispiel angeführt: Eine Klassenbildung verbindet die drei ersten Zahlenbereiche. Die Anzahl der Objekte (oft ≤ 1000) liegt im anschaulichen, die Anzahl der Klassen (optimal ≈ 7) im psychologischen und die Kriterien für die Zuordnung (Ja/Nein) im binären Bereich. Verallgemeinert gilt, dass beim Übergang zur jeweils nächsten Klasse der Informationsgehalt über die Objekte deutlich kleiner wird. Dies bedingen sowohl Unschärfen als auch neue Inhalte, was dann wieder mit der Entstehung von neuer Information verbunden ist.

Der **binäre** (zweiwertige) Zahlenbereich ist u.a. durch Ja/Nein-Entscheidungen, also die Aussagenlogik, die Boolesche Algebra und die binäre Arithmetik gekennzeichnet.

Der **psychologische** Zahlenbereich ist durch die Grenzen unseres Gedächtnisses bestimmt. Bei einer zunächst unübersichtlichen Menge von Objekten bilden wird immer 7 ± 2 Klassen. Da diese Grenze auch in vielen anderen psychologischen Zusammenhängen auftrat, nennen die Psychologen die 7 eine magische Zahl. Unser Gegenwartsgedächtnis fasst etwa 150 Bit, was $\mathrm{ld}(150) \approx 7{,}2$ Entscheidungen entspricht. Dies erklärt warum die 7 in der Menschheitsgeschichte stark hervortritt [4].

Der **anschauliche** Zahlenbereich deckt sich in etwa mit dem Bereich kleiner Zahlen bei RUCKER [5]. Er betrifft insbesondere unser Alltagsverhalten und ist durch etwa 1000 und $^{1}/_{1000}$ begrenzt. Bei einer Länge von einem Meter ist gerade noch ein mm mit bloßem Auge zu erkennen. Bis tausend zählt man in etwa einer Stunde. RUCKER führt auch den Zehn-Finger-Flipflop mit $2^{10} = 1024$ ein. Spätestens ab dem Mittelalter erfolgte die Staffelung großer Zahlen gemäß Million, Milliarde, Billion, Billiarde, Trillion, Trilliarde usw. Auch die Vorsätze des SI führen dazu, dass die eigentlichen Maßzahlen immer in diesem Bereich liegen.

Der **naturgegebene** Zahlenbereich gehört zur o.g. physikalischen Erfahrung. Ihm entspricht die Gleitkomma-Arithmetik vieler Rechner. Hier sind die Exponenten wichtiger als die Mantisse. Für die Exponenten gilt nicht mehr das Peano-Axiom. Soll der Exponent um 1 erhöht werden, so bedeutet das für die Zahl keine Addition sondern eine Multiplikation, also eine neue Qualität. RUCKER nennt diesen Zahlenbereich den mittleren und führt für seine Obergrenze eine neue Zahl „Googol" = 10^{100} ein. Diese Zahl ist unvorstellbar groß, aber noch nicht unendlich.

Noch wesentlich größere Zahlen entstehen dann, wenn man z.B. berechnet auf viele Arten z.B. 32 Spielkarten auf einem Tisch angeordnet werden können. Die möglichen Spielzüge bei Schach und Go sind in Bild 3 eingetragen. Würden z.B. die rund 10^{80} Atome des Weltalls zur Speicherung je eines Bit verwendet, so entständen dadurch $(2^{10})^{80}$, also rund $(10^{3,10})^{79}$ unterscheidbare Zustände. Allein der Exponent ist hier schon eine unvorstellbare große Zahl mit $3{\cdot}10^{79}$ Ziffern. Bei der Evolution und der Quantentheorie wird in jeden Zeitpunkt aus der entsprechenden Vielzahl der Möglichkeiten immer die Entscheidung für einen Variante gewählt. Das für Abschätzungen dieser Art zuständige Gebiet der Mathematik ist die Kombinatorik. Folglich erfüllen diese Zahlen den **kombinatorischen** Bereich. RUCKER hat als Obergrenze hierfür den Googolplex als Zahl eingeführt, die eine 1 mit Googol Nullen ist.

Im **mathematischen** Zahlenbereich existieren noch Ergänzungen: Das abzählbar Unendliche, die beliebig dichte Belegung der Zahlengerade (reelle Zahlen) sowie Grenzwerte und die Differential- und Integralrechnung.

Logarithmus

Der Begriff Logarithmus leitet sich vom Griechischen logos (Vernunft) und arithmos (Zahl) ab. Meist wird der Logarithmus als Umkehrfunktion der Potenz- bzw. Exponentialfunktion angesehen. Das ist jedoch nur indirekt richtig. Denn eigentlich gilt

$$y = a^x \;\rightarrow\; x = \sqrt[a]{y} = y^{1/a}.$$

Doch die Wurzeloperation als Umkehroperation ist bestenfalls noch für *a* gleich 2, 3 und 4 mit leidlichem Aufwand durchzuführen. Für nicht ganzzahlige *a* entstehen fast unüberwindliche Schwierigkeiten. Dagegen lässt sich $y^{1/a}$ in einigen Sonderfällen iterativ behandeln (s. Bild 1a für kleine Werte). Doch praktisch wird meist die (indirekte) logarithmische Umkehr benutzt.

$$x = \frac{\log(y)}{\log(a)}.$$

Sie setzt jedoch die Kenntnis der Logarithmen für *a* und *y* voraus. Erstaunlich ist dabei, dass offensichtlich ohne genaue Kenntnisse über die Logarithmen, intuitiv und die vereinfachende Anwendung bereits sehr früh erfolgte. Selbstverständlich geschah dies zunächst für die Multiplikation bzw. Division. Mittels Tabellen war es so möglich, sie durch die weitaus einfachere Addition und Subtraktion zu ersetzen. Hierbei ist außerdem zu bedenken, dass die Multiplikation und noch mehr die Division damals sehr viel komplizierter waren, als heute in unserer Schulmathematik. So haben indische Mathematiker bereits im 2. Jh. v.Chr. erste „Logarithmen" erwähnt. In der Antike benutzte man sie für umfangreiche Berechnungen auf der Basis 2. Im 8. Jh. beschrieb der indische Mathematiker VIRASENA Logarithmen zur Basis 3 und 4. Ab dem 13. Jh. wurden logarithmische Tabellenwerke von muslimischen Mathematikern erstellt.

In Europa beginnt die Nutzung von Logarithmen im 17. Jh. Hier prägte um 1614 LORD JOHN NAPIER OF MERCHISTON (1550 – 1617, auch Neper[4] ist gebräuchlich) den Begriff und publizierte seine Erkenntnisse unter dem Titel „Mirifici logarithmorum canonis descriptio". Ursprünglich verwendete er noch „künstliche Zahl". Nachdem ihm HENRY BRIGGS (1556 – 1630) vorschlug, die Basis 10 zu verwenden, begann er hierfür mit den Berechnungen umfangreicher neuer Logarithmentafeln. Sie konnten aber erst nach seinem Tode durch BRIGGS fertig gestellt werden und erschienen 1624 als „Arithmetica logarithmica" 14-stellig für die Zahlen 1 - 20 000 und 90 000 - 100 000. Die fehlenden Werte berechneten EZECHIEL DE DECKER und ADRIAN VLACQ, deren vollständige Logarithmentafel 1627 erschien. Besonders beliebt waren die Tafeln bei den Astronomen, erleichterten sie ihnen doch die umfangreichen numerischen Berechnungen ganz wesentlich. Von LEONHARD EULER (1707 – 1783) wurden 1728 die Logarithmen auf der Basis e eingeführt. In der heute üblichen Weise wurden die Logarithmen 1742 von WILLIAM JONES in seiner Einleitung zu den Logarithmentafeln von WILLIAM GARDINERS eingeführt.

Unabhängig von den Arbeiten NAPIERS entwickelte der Schweizer Uhrmacher JOBST BÜRGI (auch Joost, Justus Burgi, Borgen, Borgius; 1552 – 1632) angenähert natürliche Logarithmen. Sie wurden 1620 als „Arithmetische und Geometrische Progreß-Tabulen, sambt gründlichem unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol" in Prag veröffentlicht. Sie entstanden im Zusammenhang mit den Arbeiten zur Zinseszinsberechnung von SIMON STEVIN (1548 - 1620).

[4] Nach ihm ist in der Nachrichtentechnik das logarithmische Dämpfungsmaß Np (Neper) benannt. Dabei wird das Verhältnis der Amplituden a_1 und a_2 wie folgt in eine Dämpfung umgerechnet $N\,[\mathrm{Np}] = \ln(a_1/a_2)$.

Die rechen**technische** Anwendung der Logarithmen ist der ***Rechenschieber***. Bis zur Einführung des Computers war ein sehr wichtiges Hilfsmittel zumindest aller Ingenieure. Sie wurde erstmalig von 1617 NAPIER als Streifengerät einschließlich von Dualzahlen genannt. Ab 1627 sind die entsprechenden Napierstäbchen bekannt. Doch den ersten benutzbaren „Rechenschieber" mit logarithmischer Skalenteilung und verschiebbarer Zunge schuf um 1624 EDMUND GUNTER 1624. Eine Weiterentwicklung erfolgte 1622 durch WILLIAM OUGHTRED (1575 – 1660). Er fügte die Winkelfunktionen hinzu. Ab 1650 gab es dann Rechensschieber im heutigen Sinn. Durch die Einführung des Taschenrechners wurden sie überflüssig. Aus rein mathematischer Sicht ist der Rechenschieber eine Kuriosität: Mit ihm kann man Multiplizieren und Dividieren aber nicht Addieren oder Subtrahieren. Er beherrscht also das Schwierige, aber nicht das Einfache.

Logarithmische Naturgesetze

Besonders häufig wird der Logarithmus dort genutzt, wo der Wertebereich viele Größenordnungen umfasst. Dann dient er einfach dazu, um eine bessere Anschaulichkeit zu erhalten. Wenn z.B. große Zeiträume beschrieben werden müssen, z.B. in der Archäologie oder Evolution, dann wird die Zeitachse meist logarithmisch eingeteilt. Beim Verlauf vom Urknall bis heute müssen dazu sogar die ersten µs und die letzten Jahrmilliarden erfasst werden. Weiter gibt es viele Fälle, wo sogar besondere Maßeinheiten eingeführt werden. Beispiele sind die Größenklassen der Sternhelligkeiten, der pH-Wert bezüglich der Ionenkonzentration (Säurewert), das bereits in der Fußnote [4] erwähnte Neper (Np), das vergleichbare Maß dB (Dezibel: $20\cdot\log(u_1/u_2)$) sowie das 1926 von HEINRICH BARKHAUSEN (1881 – 1956) ähnlich definierte, auf 1 kHz bezogene phon für die subjektive Lautstärke. Bei diesen Fakten ist es kaum verwunderlich, dass sich auch unsere Sinnesorgane dem logarithmischen Verlauf angepasst haben. Hierfür gilt das Weber-Fechner-Gesetz der Psychophysik von ERNST HEINRICH WEBER (1795 – 1878) und GUSTAV THEODOR FECHNER (1801 – 1887). Es besagt, dass zwischen der Energie R eines Reizes und der psychologisch empfundenen Intensität W die folgende Beziehung besteht:

$$W = K\cdot\ln(R/R_0) + c$$

Darin sind K und c Konstanten, die von der Reizart, z.B. Licht, Schall, Wärme oder Kälte abhängen. In der Thermodynamik besitzt die Entropie[5] S beachtliche Bedeutung. Für sie konnte LUDWIG BOLTZMANN (1844 – 1906) mittels der kinetischen Gastheorie die Formel

$$S = k\cdot\ln(w)$$

herleiten. Dazu teilte er den verfügbaren Raum in kleine Zellen und bestimmte die Aufenthaltswahrscheinlichkeit w der Gasteilchen (Atome). Als Proportionalitätsfaktor tritt die Boltzmann-Konstante $k \approx 1{,}38065\cdot10^{-23}$ J/K auf. Ein logarithmischer Verlauf entsteht auch dann, wenn die zeitliche Änderung einer Größe $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ proportional zu x ist oder umgeformt $\mathrm{d}x/x \sim \mathrm{d}t$ gilt. Dann liefert die Integration

$$\int_{x=0}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(t) + C$$

Hiermit kann dann z.B. die Arbeit W bei der Volumenänderung $V_a \to V_e$ eines idealen Gases gemäß $\mathrm{d}W = p\cdot\mathrm{d}V$ und $p = n\cdot R\cdot T/V$ bestimmt werden:

---

[5] Stark vereinfacht kann sie als noch verfügbare Energie angesehen werden.

$$W = \int_{V_a}^{V_e} p \cdot \mathrm{d}V = n \cdot R \cdot T \int_{V_a}^{V_e} \frac{\mathrm{d}V}{V} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_e}{V_a}\right).$$

Darin bedeuten p den Druck, T die absolute Temperatur, n die Molzahl und $R \approx 1{,}0973 \cdot 10^7$ m^{-1} die Rydberg-Konstante.

Auch in der Nachrichten- und Informationstheorie gibt es eine Entropie H, die jedoch einen deutlich anderen Inhalt besitzt und 1940 von CLAUDE ELWOOD SHANNON (1916 – 2001) bestimmt wurde:

$$H = -\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \cdot \mathrm{ld}\left(p_\nu\right)$$

Sie gibt nämlich an, wie groß die mittlere Unsicherheit bei der Erkennung eines empfangenen Zeichens ist. In ihr werden der Logarithmus ld zur Basis 2 und die apriori-Wahrscheinlichkeiten p_ν der einzelnen Zeichen benutzt. Entsprechend den Eigenschaften des Logarithmus gilt auch bei dieser Formel, dass Wahrscheinlichkeiten sich mit Multiplikation fortsetzen, während für die Information dann die Addition gilt.

Als letztes Beispiel sei noch die Spannungsdifferenz ΔU einer Nernst-Zelle angegeben (WALTHER HERMANN NERNST, 1864 – 1941):

$$\Delta U = \frac{k \cdot T}{z \cdot e_0} \cdot \ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

Darin bedeuten c die Konzentrationen, e_0 Ladung eines Elektrons und z die Ladungsträgerzahl (k und T s.o.).

Literatur

[1] Schleichert, H.: Elemente der physikalischen Semantik. Oldenbourg, Wien – München 1966
[2] Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Fourier, Wiesbaden 1992
[3] Völz, H.: Grundlagen der Information. Akademie - Verlag, Berlin 1991
[4] Völz, H. u. Ackermann, P.: Die Welt in Zahlen und Skalen, mit, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg - Berlin - Oxford 1996
[5] Rucker, R.: Der Ozean der Wahrheit - über die logische Tiefe der Welt; Fischer Logo; Frankfurt/M. 1990