

Geschichte der Fraktale

1870	Cantor führt Punktmenge (Cantor-Menge) ein
1875	Die stetige, nirgends differenzierbare Weierstraßkurve (du Bois)
1890	Peano-Kurve füllt Fläche, vorgestellt
1891	Hilbertkurve
1903	H. Poincaré: Stabilität des Sonnensystems, kleine Ursache - große Wirkung
1904	Helge von Koch Beschreibt Schneeflocken und Eisblumen
1906	fand Helge Koch die Koch-Kurve Schneeflockenkurve, unendlich lang und nirgends differenzierbar
1915	W. Sierpinski erfindet das nach ihm benannte Dreieck
1918	G. Julia, Grundsatzarbeit zu den Julia-Mengen, Iterationsproblematik
1919	Die Hausdorff-Dimension komplexer geometrischer Objekte
1921	W. C. Bray entdeckt periodisch oszillierende Reaktionen
1925	Alfred Lotka: „The Elements of Physical Biology“ mit dem Räuber-Beute-Verhalten
1927	von der Pol entdeckt am Röhrenoszillator chaotische Schwingungen
1945	J. v. Neumann benutzt zelluläre Automaten
1958	Kolmogoroff führt Begriff Kapazität analog Hausdorff-Dimension ein
1961	Die Richardsonschen Skalierungsgesetze, z.B. Küstenlinien, Grenzen
1961	E. Lorenz entdeckt die Chaotik der Wettergleichungen, Schmetterlingseffekt
1968	A. Lindenmayer beschreibt genetische Algorithmen, formale Sprache; L-Systeme
1970	J. Horton Conway: Life
1971	Bertalanffy: Ausbildung rekursiver Zweigen bei Organismen.
1972	R. Thom entwickelt Katastrophen-Theorie
1975	Feigenbaum-Diagramm
1975	Mandelbrot prägt das Wort „Fraktale“ in seiner ersten französischen Publikation.
1976	M. Hénon entdeckt seltsamen Henon-Attraktor
1977	Mandelbrot: „Fractals: Form, Chance and Dimension“
1978	M. Feigenbaum findet Periodenverdopplung und Konstante $F=4,6692016090$
1980	1.4. Mandelbrot findet auf dem Bildschirm das Apfelmännchen
1982	Fraktale Modelle angewendet in Ökologie (Hastings u.a.), für Wolkenmuster (Lovejoy)
1982	Mandelbrots überarbeitete Monographie: Die fraktale Geometrie der Natur
1985	M. Barnsley erzeugt mit iterativen Gleichungssystemen den Farn
1987	Michael F. Barnsley findet die fraktale Transformierte zur Bildkompression
1990	A. Lindenmayer erscheint „The Algorithmic Beauty of plants“
1992	Peitgen definiert die Rückkopplungsmaschine für Iteration (Fraktal)

Phasenraum, Trajektorie und Attraktor

Phasenraum: beliebige Größen/Eigenschaften zur Darstellung als Koordinaten; Oft weitaus mehr als zwei; ein vieldimensionaler Darstellungsraum; So oft komplizierte Zusammenhänge einfacher darstellbar

Trajektorie: durchlaufene Kurve im Phasenraum

Attraktor: Kurve auf die sich Trajektorie einstellt

seltsamer Attraktor: Attraktor der in getrennte Stücke zerfällt

Länge einer Grenze

Küsten, Grenzen zwischen Ländern, Randkurven von Blättern usw. Eigenschaft Länge ist nicht exakt messbar.

Küste der USA: Globus: 3000 km, große Karte: 7000 km; Seekarte: 17000 km; zu Fuß ablaufen: 24000 km.

offiziell Spanien Portugal 987 bzw. 1214 km; Niederlanden Belgien 380 bzw. 449 km.

Systematisch **Lewis Richardson** 1961; Mandelbrot doppelt logarithmisches dargestellt: Näherungsgeraden:

$$L = L_0 R^{(1-D)}$$

L_0 Bezugslänge (gerade Strecke), D Hausdorff-Dimension.

Kochkurve

Länge der Ausgangs-Gerade = 1.; 4 Strecken zu je $1/3$ neue Länge $4/3$.; 16 Teilstrecken zu je $1/9$ $16/9$

n Wiederholungen $(4/3)^n$

Kurve strebt gegen eine unendliche Länge.

Äquivalenten „Messradien“ sinken auf $(1/3)^n$.

Hausdorff-Dimension also $D = \log(4)/\log(3) \approx 1,2618$

Poincaré, 1903

„Eine sehr kleine Ursache, die wir nicht bemerken, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht übersehen können, und dann sagen wir, der Effekt sei zufällig. Wenn die Naturgesetze und der Zustand des Universums zum Anfangszeitpunkt exakt bekannt wären, könnten wir den Zustand dieses Universums zu einem späteren Moment exakt bestimmen. Aber selbst wenn es kein Geheimnis in den Naturgesetzen mehr gäbe, so könnten wir die Anfangsbedingungen doch nur annähernd bestimmen. Wenn uns dies ermöglichen würde, die spätere Situation in der gleichen Näherung vorherzusagen – dies ist alles, was wir verlangen –, so würden wir sagen, dass das Phänomen vorhergesagt worden ist und dass es Gesetzmäßigkeiten folgt. Aber es ist nicht immer so; es kann vorkommen, dass kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen schließlich große Unterschiede in den Phänomenen erzeugen. Ein kleiner Fehler zu Anfang wird später einen großen Fehler zur Folge haben. Vorhersagen werden unmöglich, und wir haben ein zufälliges Ereignis.“

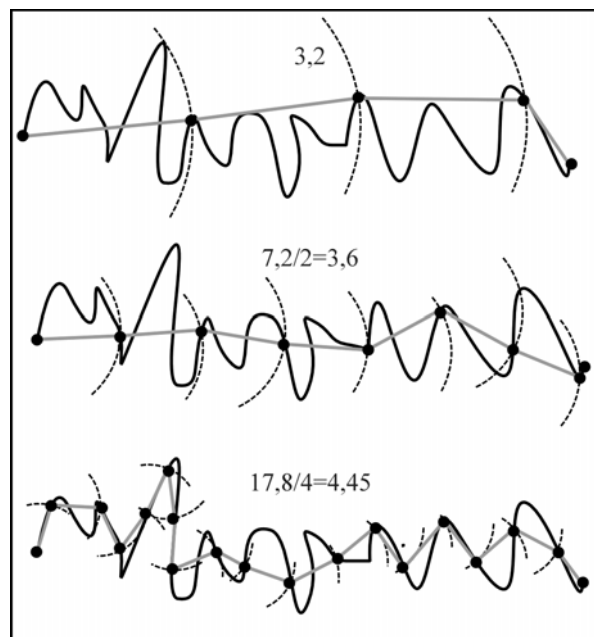
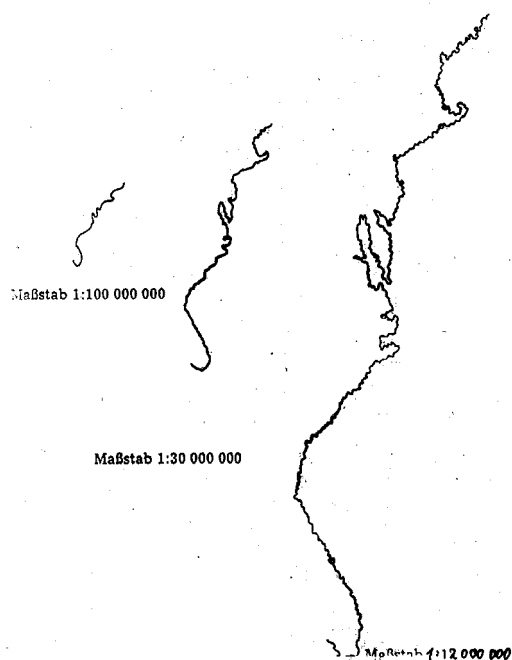
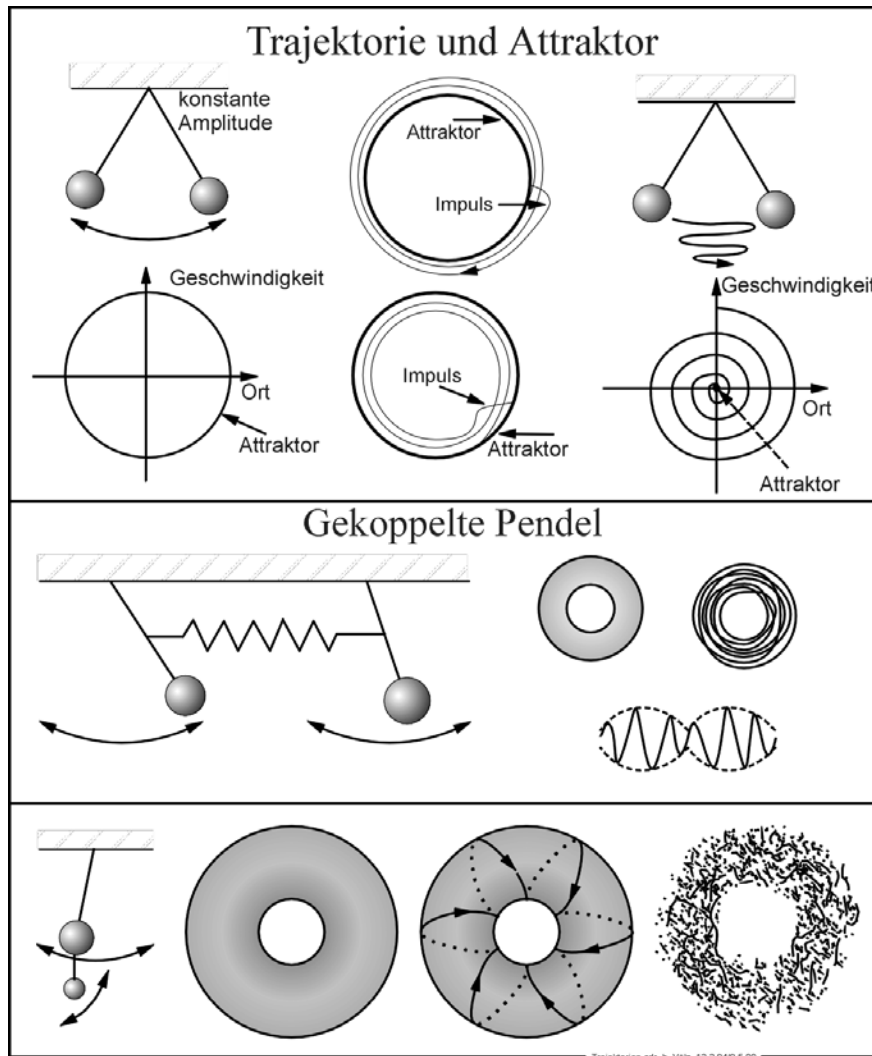
Emergenz

lateinisch: **emergere**: Auftauchen

zum-Vorschein-Kommen einer neuen, wesentlich kennzeichnenden Eigenschaft eines Systems.

tritt Singularität; Bifurkation an einen kritischen Punkt ein

Der Nachzustand ist nicht auf den Vorzustand reduzierbar.



Synergetik

griechisch: synergein

Zusammenwirken

Selbstorganisation komplexer Systeme, beschreibt die Entstehung und Struktur einer neuen Eigenschaft des Systems

Unbestimmtheit im Kleinen die Unbestimmtheit im Großen

Kleinste Ursachen können so große Auswirkungen haben gilt u. a. wenn einzelne atomare Ereignisse in makroskopische Dimensionen hinein verstärkt werden

Beispiele:

Keimbildungen bei

Kondensationen von Tropfen

Entstehung von Turbulenzen

deshalb ist vermutlich die langfristige Wettervorhersage nicht nur praktisch, sondern auch grundsätzlich unmöglich.

Katastrophe als besonderes Ereignis

Arbeitsdefinition:

Unerwartetes Ereignis mit negativen Folgen, nach der Lehrmeinung:

In Bezug auf **klassische Wissenschaft** heißt das:

Im Widerspruch zum Rationalismus

Ursache nicht erkennbar: Radioaktiver Zerfall (Hoffnung auf komplexeres Modell)

Tragik bei Freud

Negative Folgen als **subjektive** Bewertung entfällt hier

kleine Ursache große Wirkung

Differentialgleichungen, Aufspaltung der Fortsetzung; Unstetigkeiten

Es existieren mehrere Lösungen gleichzeitig,

mehrblättrige Funktionen

Monsterfunktionen

Auslöseeffekt der Kybernetik

Zerbrechen von etwas bei höherer Belastung (Knickmoment)

keine Wiederholbarkeit

Es gibt keine gleichen Anfangsbedingungen

Statistik bei Messungen

Rauschen und Quanteneffekte

Feigenbaum $a := a(a-1)x$

Start z.B.: $a_0 = 0,5$; x bestimmt unterschiedliches

Verhalten:

a **konvergiert** gegen einen stabilen Wert

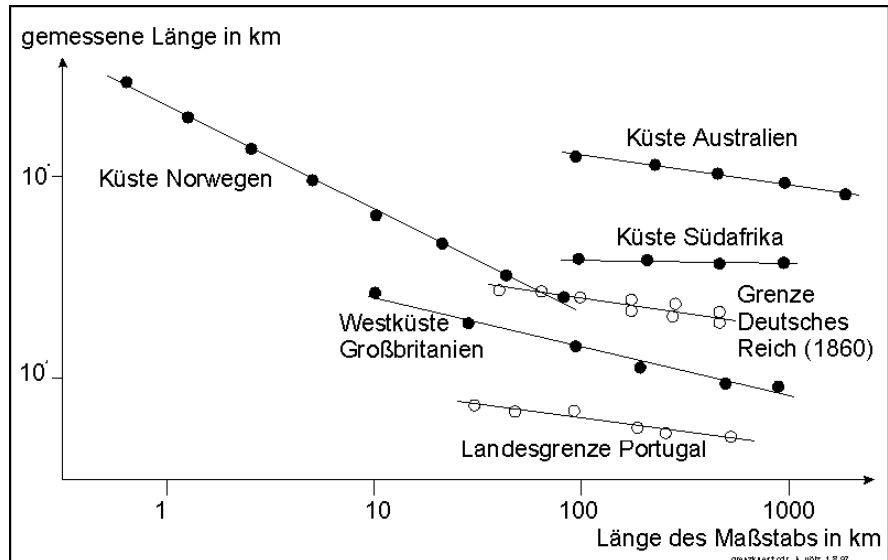
a **divergiert** gegen unendlich

a **pendelt** periodisch zwischen 2, 4, 8 usw.

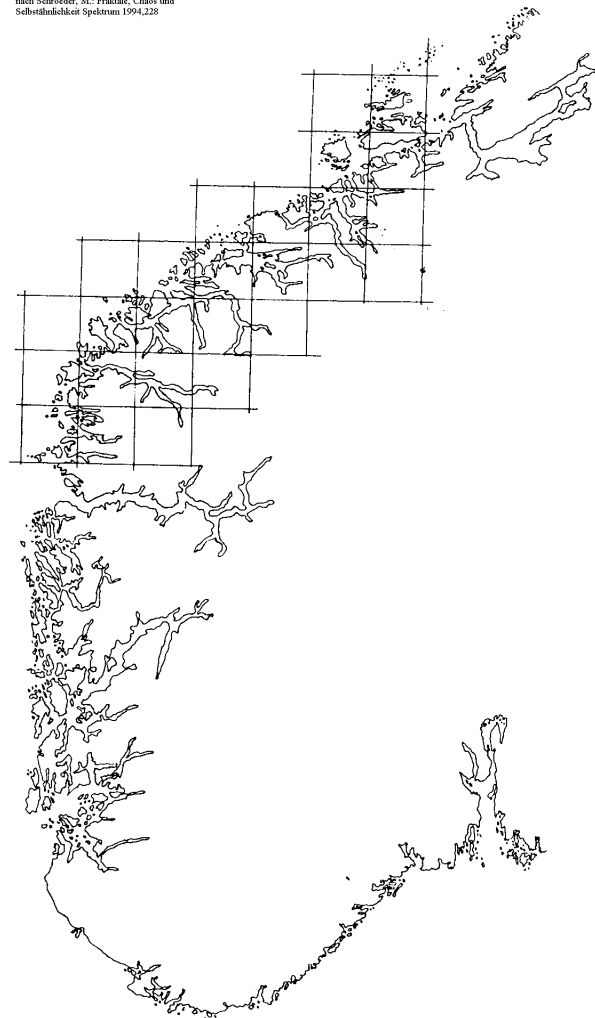
gilt nach einem Einschwingvorgang:

a verhält sich weitgehend **stochastisch**

Funktion für alle $y = f(x)$ ergibt **Feigenbaum-Diagramm**



nach Schroeder, M.: Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit Spektrum 1994, 228



Fraktale und fraktale Methoden

Prinzipien zum Erzeugen

1. Kurven-Linien

A) Monsterkurven der Mathematik: Koch-Kurve, Sierpinsky-Dreieck usw.; Grundprinzip mit 3 Stufen

Ausgangslinie

Generator-kurve

Ergebnis nach unendlich häufiger Iteration (Rekursion)

B) natürliche Grenzen, Küsten, Blätter usw.

C) Länge $L = l_0 a^{(1-r)}$; u.a. Hausdorff-Dimension

2. Formale Sprachen

Algorithmus nur eine Fortsetzung

formale Sprache nutzt zugleich alle Fortsetzungen, entspricht Rekursion.

Lindenmeyer-Systeme, generiert Pflanzen, Moose, Gräser usw.

3) Iterations-Prinzipien

A) Feigenbaum: $x := f(x, a)$

Konvergenz, Pendeln, Stochastik, Divergenz

B) Mandelbrot: $x = f(x, y, a)$ und $y = g(x, y, b)$

a, b durchläuft die Ebene und sind Startpunkt

Iterationstiefe

C. Julia: Menge der Punkte, die sich auf sich selbst abbildet.

Attraktor, seltsamer Attraktor

Numerische Fehler = große Probleme

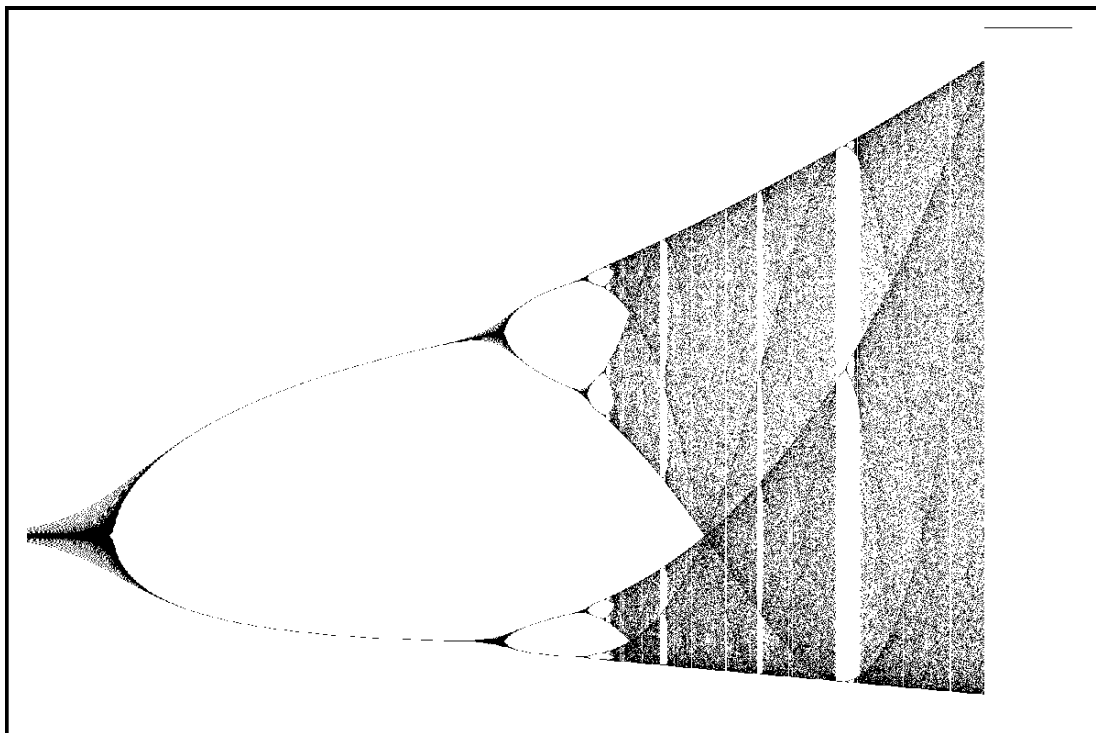
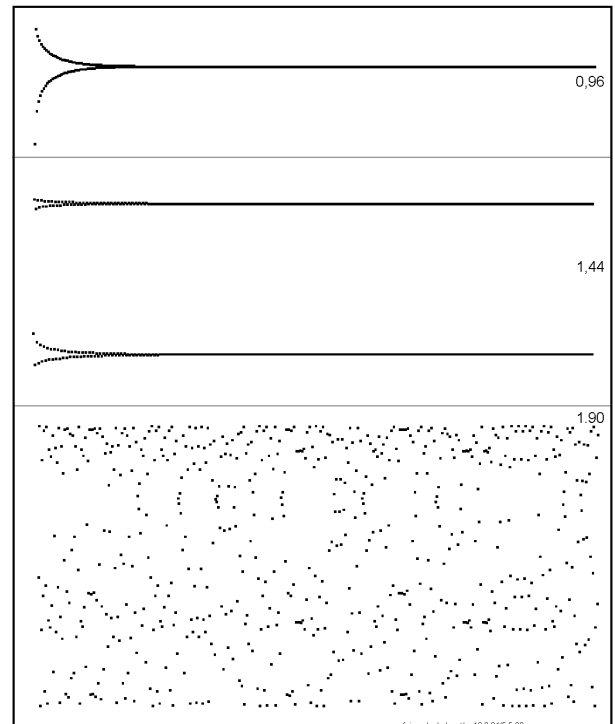
4) Drehmultiplikation auf sich selbst abbildend

5) Zellulare Automaten Nachbarschaftsbeziehungen und Gesetze, Spiele z.B. Life

6) Zufallsprinzipien Hüpfen nach Spektrum der Wissenschaft
Generator nach Barnsley

7) Nichtlineare Gleichungen mit Unstetigkeiten Hysteresis; Chaostheorie; Evolution; Differential-Gleichungen

Verhulst-Gleichung mit 460 Zyklen an unterschiedlichen Stellen



Fraktale - Möglichkeiten

1. Funktionen

komplexe Funktionen z.B. $x := x + c$

zwei unabhängige Funktionen

$$x := f(x, y, c_x, c_y)$$

Apfelmännchen

$$x := x^2 - y^2 - c$$

$$y := g(x, y, c_x, c_y)$$

$$y := 2xy - d$$

2. Darstellungsebenen

x - y -Ebene unterschiedlich bei c, d

c - d -Ebene nahezu unabhängig von x, y

3. Konvergenzgeschwindigkeit

Auswahl der Farben und des Abstandes

4. Divergenzgeschwindigkeit

Auswahl der Farben und des Abstandes

5. Grenzkriterien

Anzahl der Zyklen

Radius $(x^2 + y^2) > \max$.

Raute $ABS(x) + ABS(y)$

Betrag $ABS(x - x_{alt}) + ABS(y - y_{alt})$

Julia-Darstellung = Rand der Konvergenz

6. Gebirgsdarstellung

7. Zwischenbereichsdarstellung

Mandelbrot-Darstellungen

Zwei Koordinaten x, y und zwei Iterationsvariablen A, B :

$a_{n+1} := F(a_n, b_n, x, y)$

$b_{n+1} := G(a_n, b_n, x, y)$

a_0 und b_0 Startwerte meist 0, 0. (Andere ändern etwas das Aussehen)

Abbruch für Konvergenz- und/oder Divergenzkriterien festlegen:

Kriterium für (a, b) oder Zyklenzahl z

Üblich für Divergenz mit z.B. $G > 2$

$a^2 + b^2 > G$ Kreis; möglich auch

$ABS(a) + ABS(b) > G$ quadratische Raute

$ABS(a) > G$ OR $ABS(b) > G$ Quadrat

$ABS(ab) > G$ Zykloide

Konvergenz: Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Werten

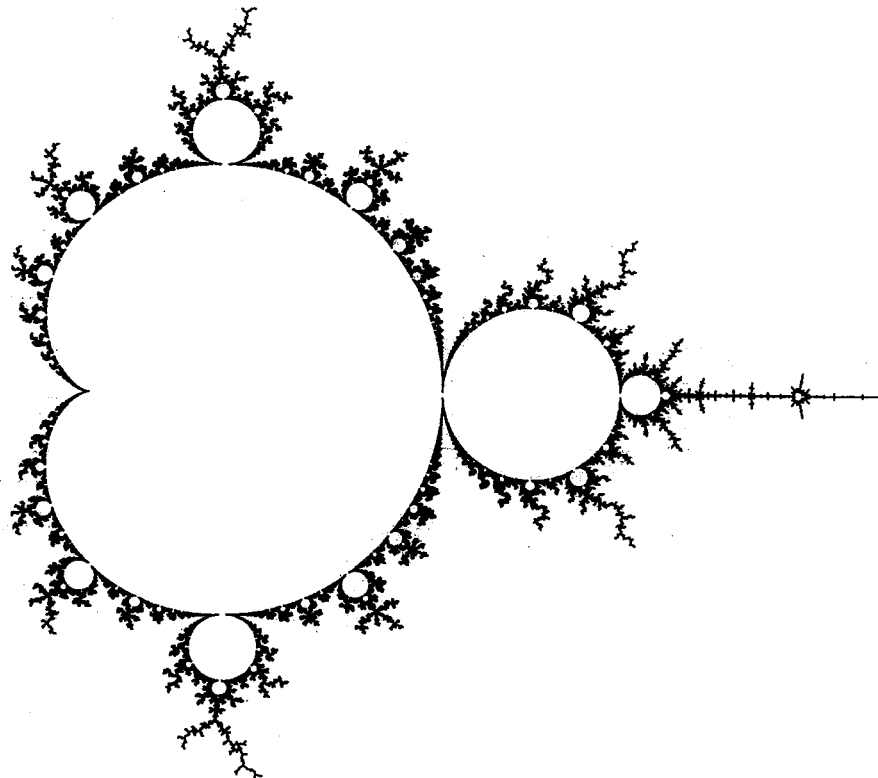
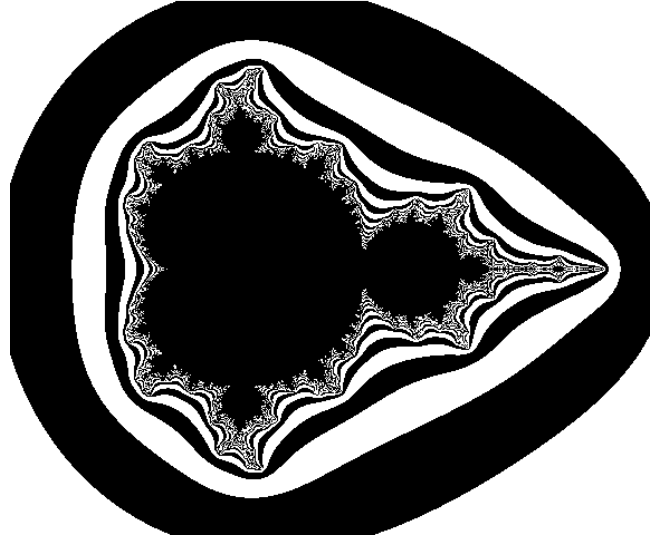
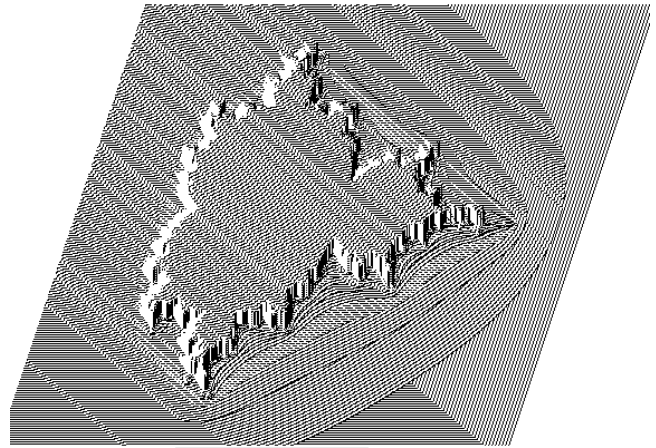
Unterschreiten eines kleinen Wertes E ($< 1/50$):

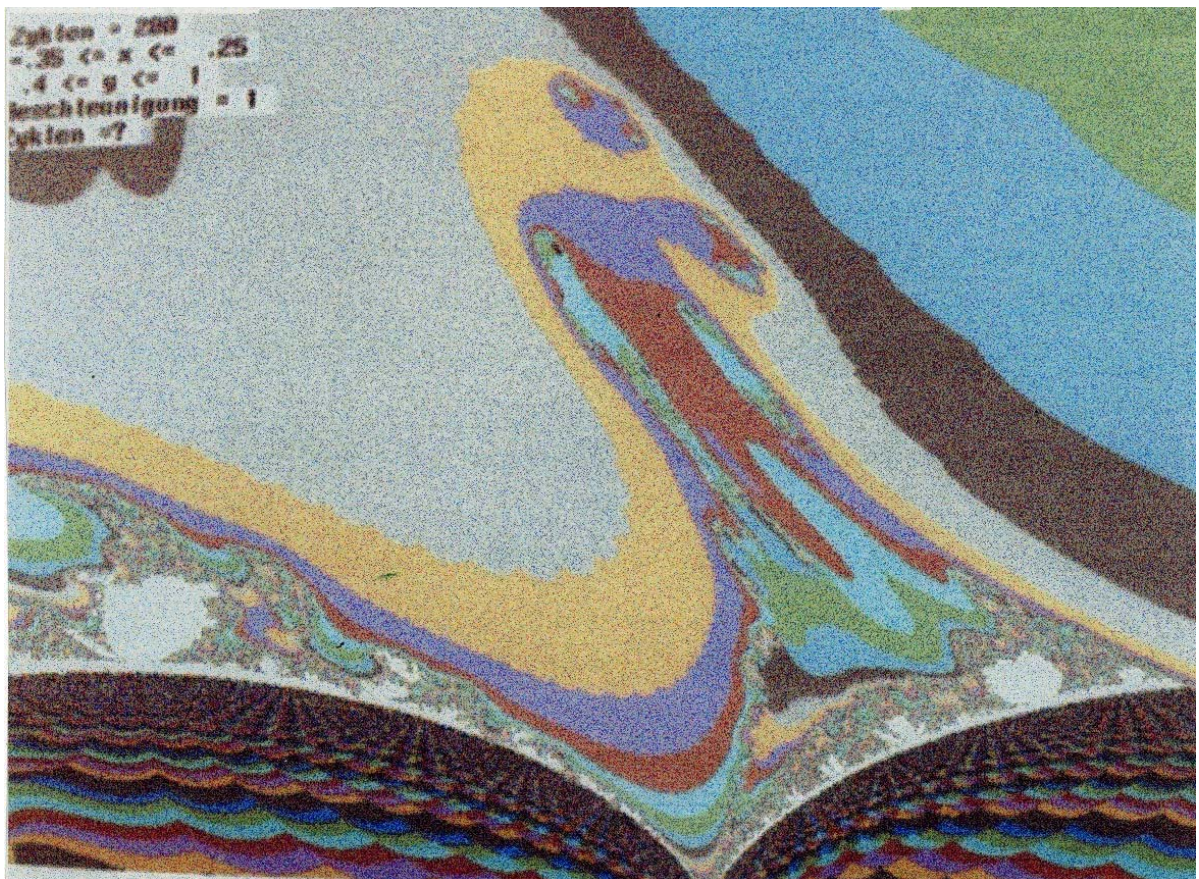
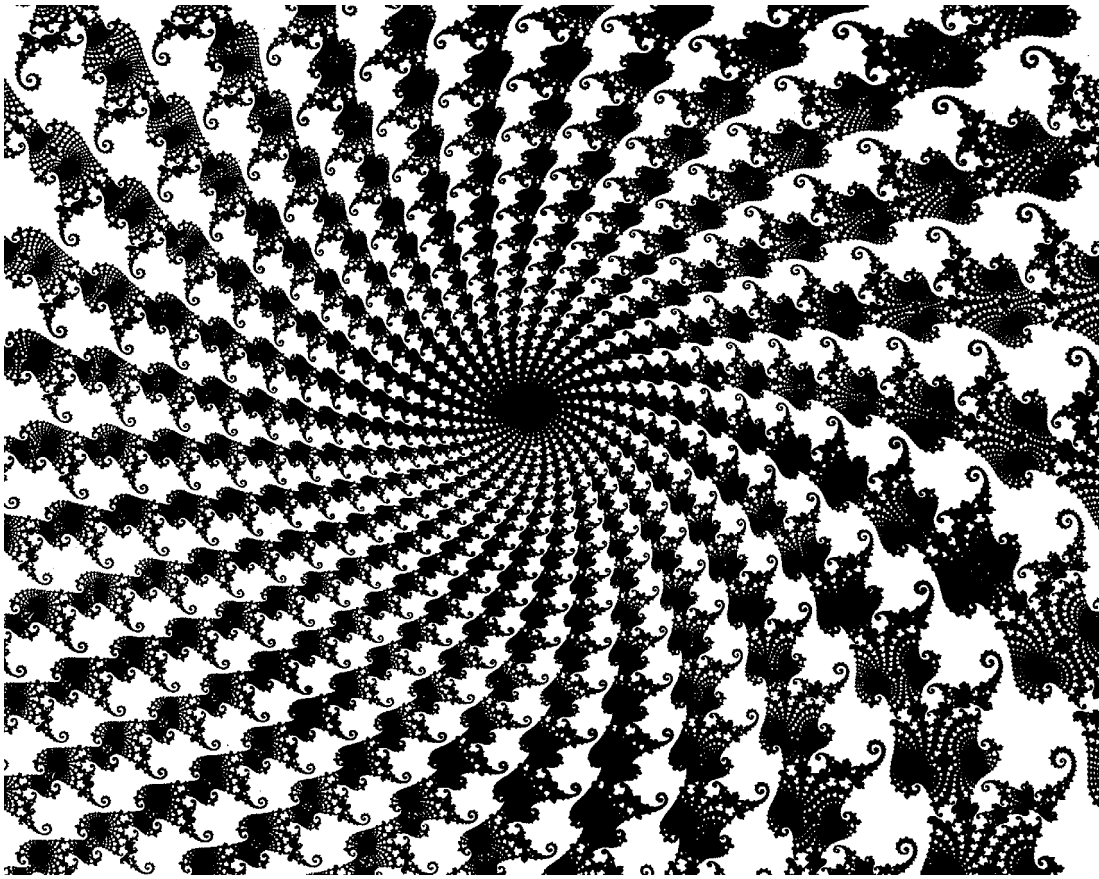
$(a_n - a_{n-1})^2 + (b_n - b_{n-1})^2 < E$ möglich auch z. B.:

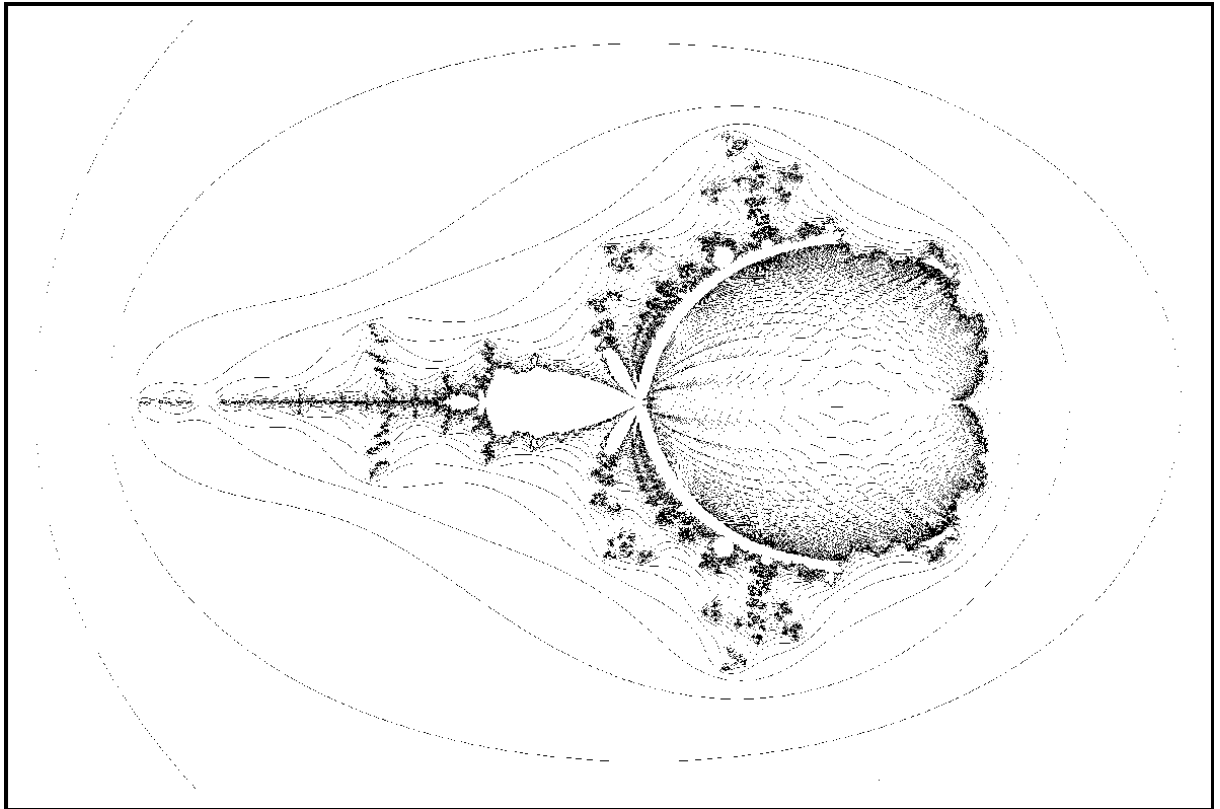
$ABS(a_n - a_{n-1}) + ABS(b_n - b_{n-1}) < E$

Viele Darstellungen möglich, z.B.:

Zyklenzahl als Höhe über der x - y -Ebene = Gebirge in Höhenlinien oder Farben

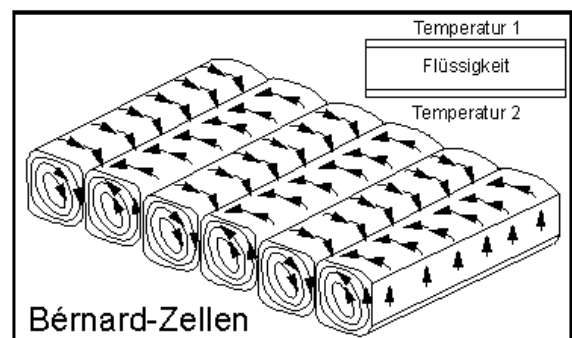
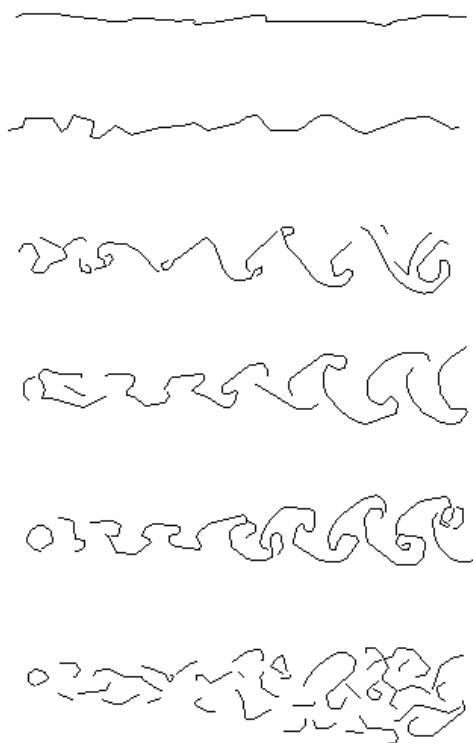




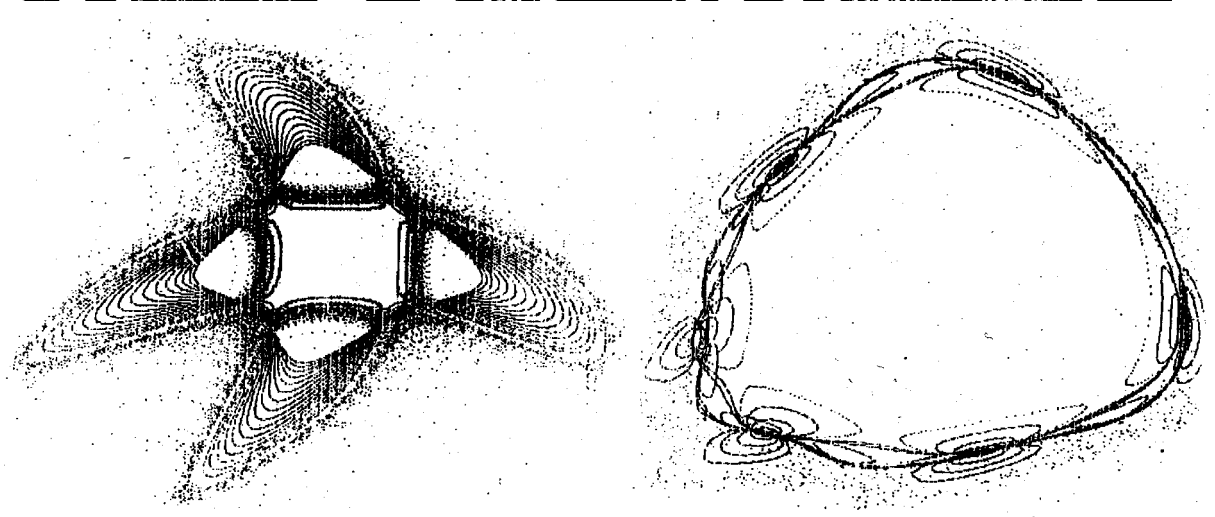
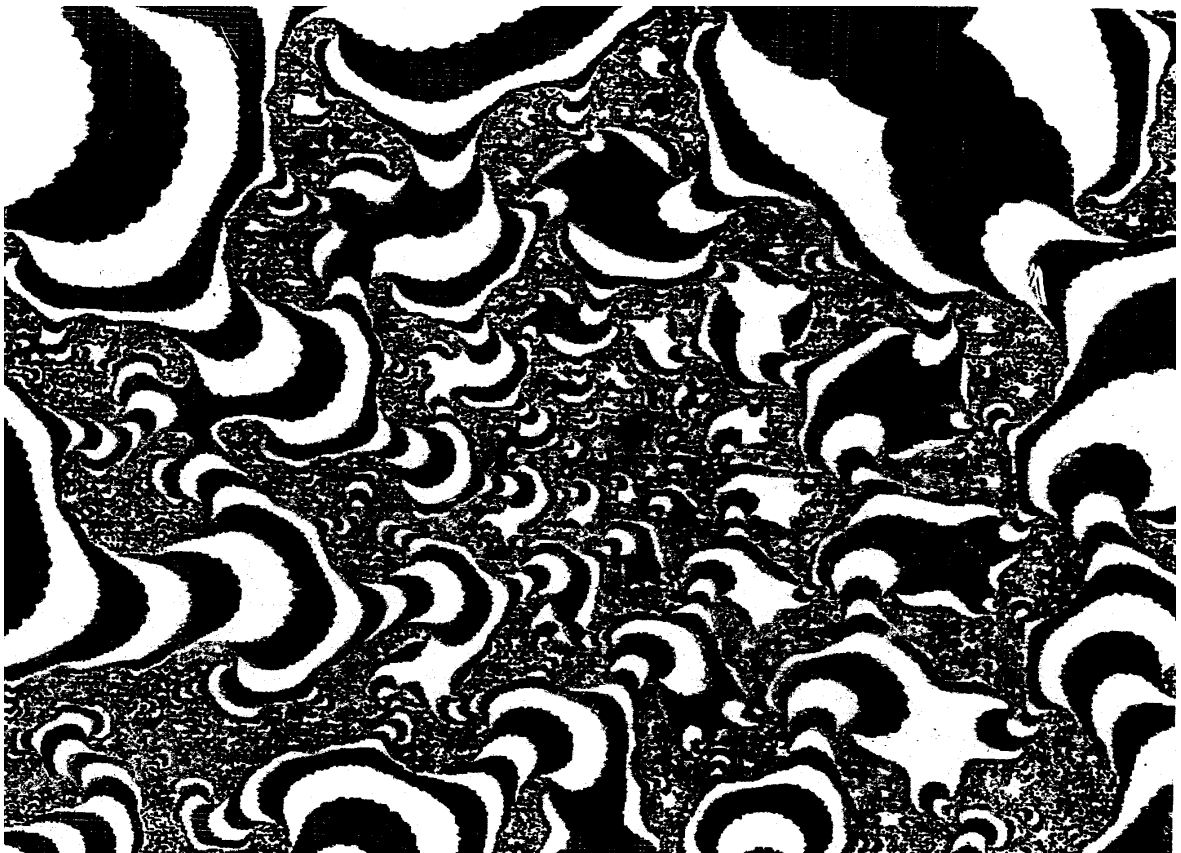


Wirbelstraße an einem Widerstand
(Stab) im Wasser

zunehmende Strömungsgeschwindigkeit
↓



chaos.pdf H. Völz 10.2.94



Aristid Lindenmayer

Regeln:

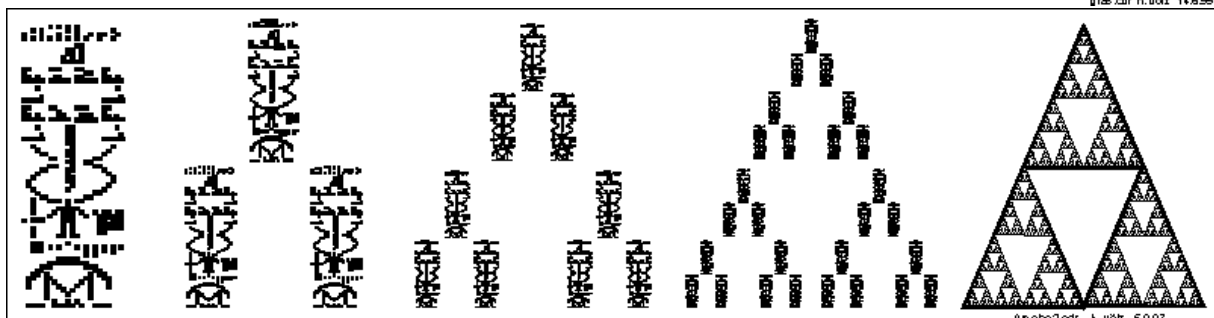
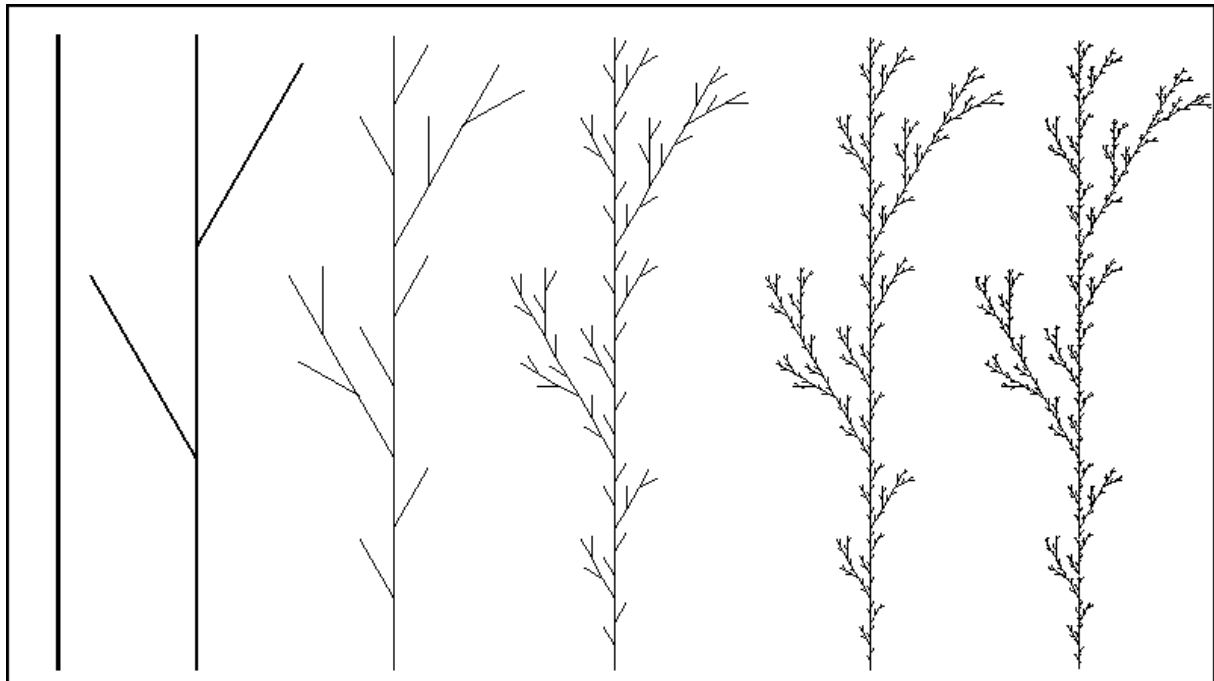
F	Cursor vorwärts, Linie zeichnen
+	Richtung im Uhrzeigersinn drehen um n Grad
-	Richtung gegen Uhrzeigersinn drehen um n Grad
[	Speichert Ort und Winkel vom Cursor
]	Geht an gespeicherte Stelle zurück

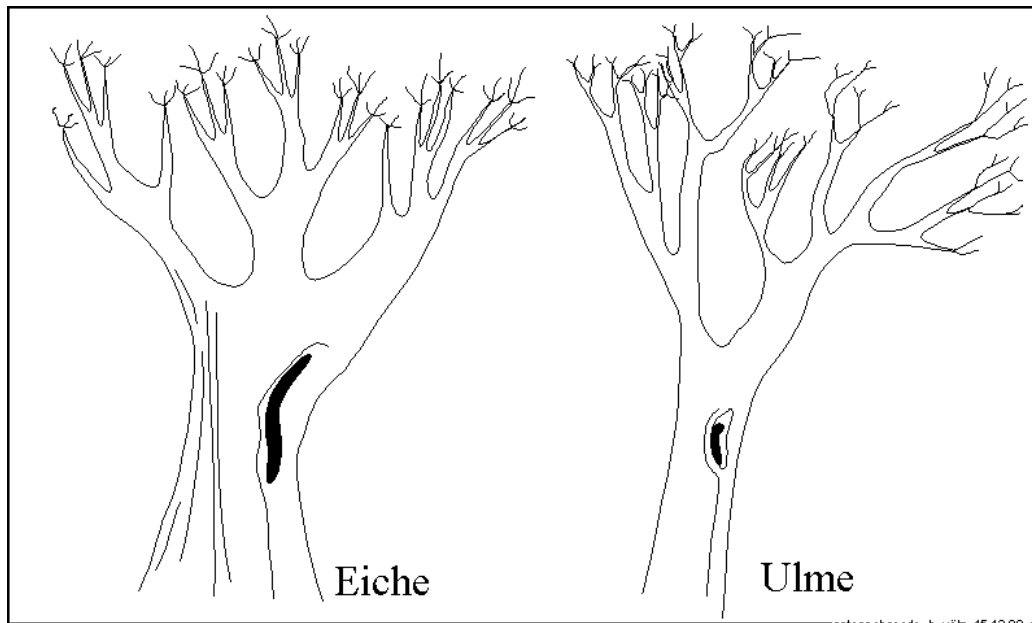
Pflanze {
 ANGLE 12 REM 360/12 = 30 °
 AXION F
 F = F[+F]F[-F]F }

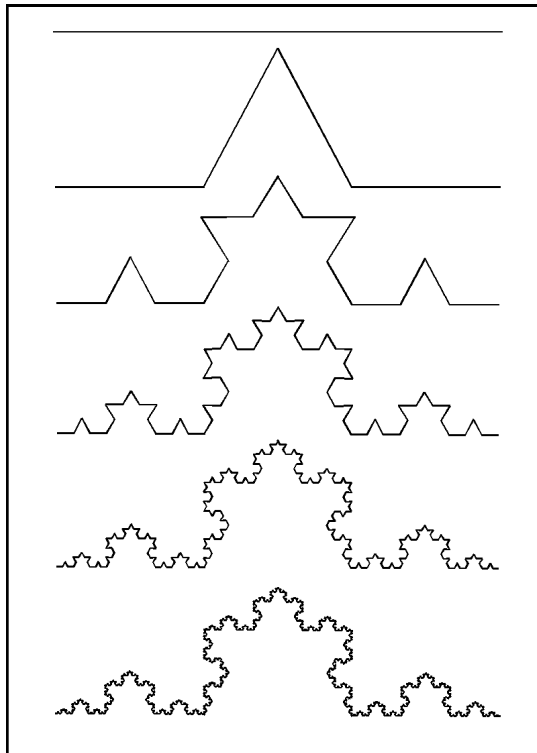
- [illegible]

Mehrdeutigkeit der Zeichenkette:

$F = F[+F]F[-F]F$ $F = FF[+FF]FF[-FF]$ $F = F[+F][+F]F[-F]F$
erzeugen gleiches Bild







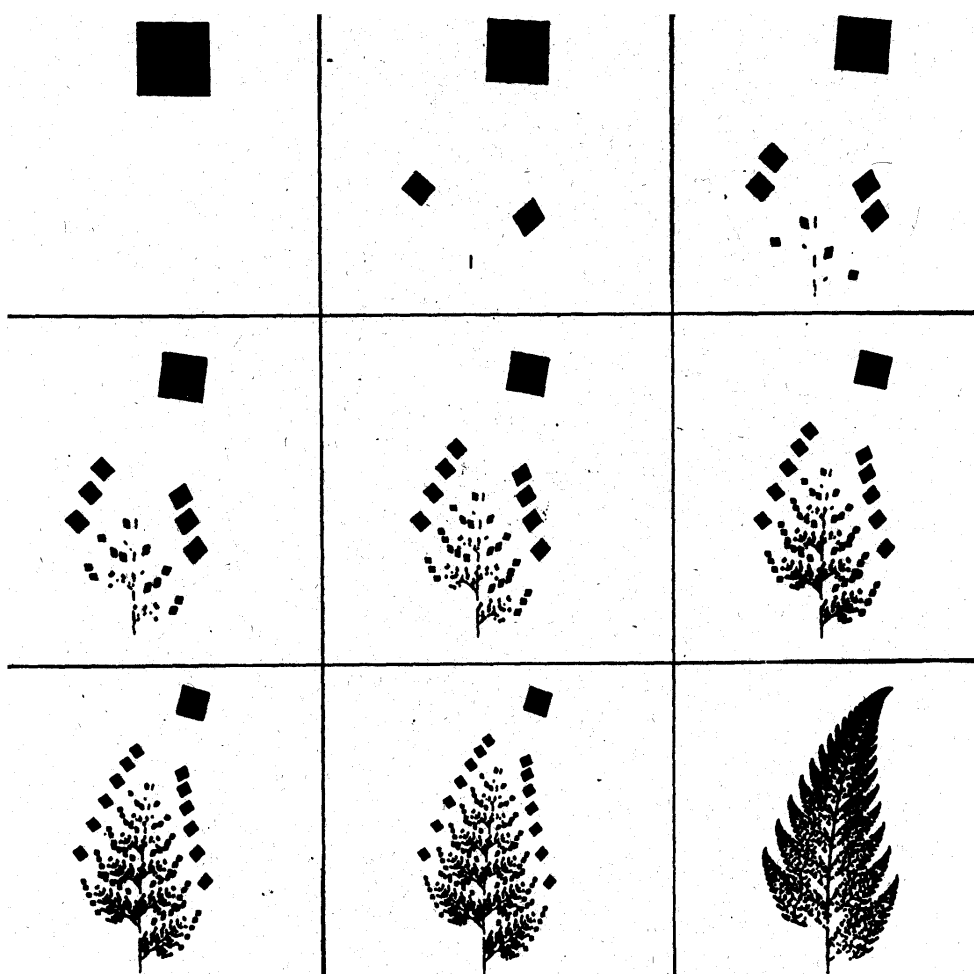
Ersetzen durch

$N = 4, r = 1/3$
 $D = \log(4)/\log(3) = 1,26 \dots$

$N = 8, r = 1/4$
 $D = \log(8)/\log(4) = 1,5$

$N = 9, r = 1/3$
 $D = \log(9)/\log(3) = 2$

ersatz.cdr h. vözl 10.5.00





Barnsley „Hüpfers“

statistische Codierung mit mehrfacher Anwendung

$$x := A_n \cdot x + B_n \cdot y + C_n$$

$$y := D_n \cdot x + E_n \cdot y + F_n$$

Daten für Farn

1. Gleichung: $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; $D = 0.16$; $E = 0$; $F = 0$
2. Gleichung: $A = 0.2$; $B = -0.26$; $C = 0.23$; $D = 0.22$; $E = 0$; $F = 1.6$
3. Gleichung: $A = -0.15$; $B = 0.28$; $C = 0.26$; $D = 0.24$; $E = 0$; $F = 0.44$
4. Gleichung: $7A = 0.85$; $B = 0.04$; $C = -0.04$; $D = 0.85$; $E = 0$; $F = 1.6$

Änderungen für andere Bilder, zeigen, daß die Koeffizienten recht empfindlich sind:

Farn2: $A_4 = 0.99$

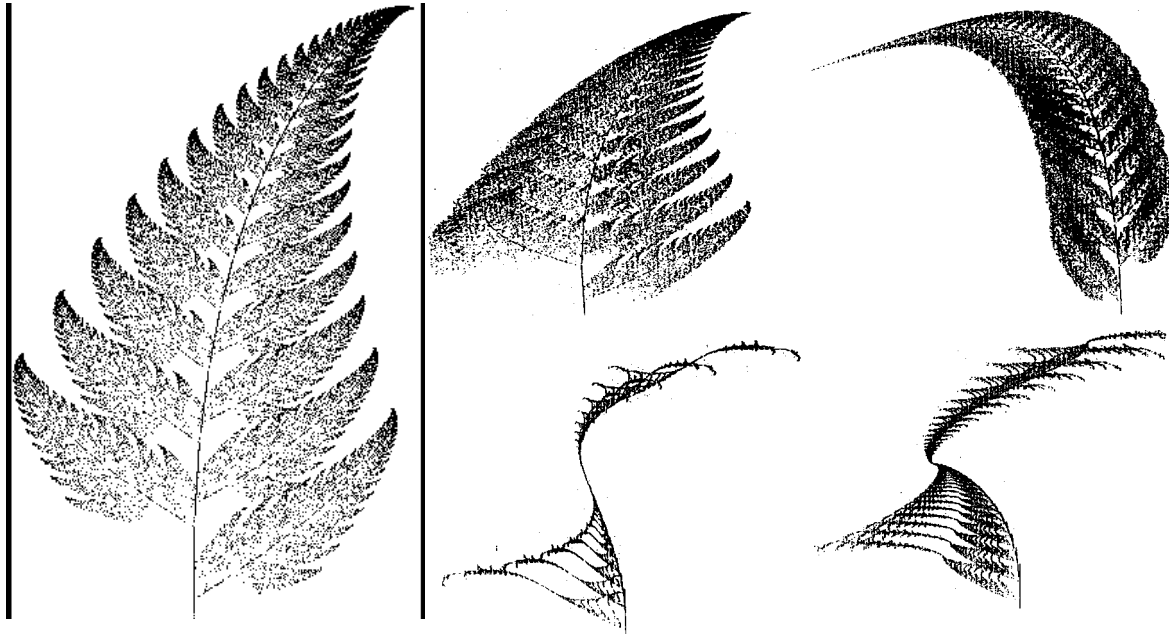
Farn3: $A_2 = 0.7$

Farn4: $F_2 = 16$

Farn5: $F_2 = 16$; $A_4 = 0.65$

Eigenschaften von Fraktalen

- verkrumpte Kurven, fraktale Dimension
- Hohe Komplexität, Strukturereichtum des Bildes
- einfacher rekursiver Algorithmus mit kleiner Kolmogoroff-Komplexität
- Selbstähnlichkeit
- Ähnlichkeit mit Gebilden und Geschehen in der Natur, anders als Euklidische Geometrie
- Ähnlichkeit: M. C. Escher: Unendlichkeit und unmöglichen Perspektiven
- Verquickung von Zufälligkeit und Gesetzmäßigkeit.
- Ästhetische Wirkung fraktalen Bilder, Beziehungen zur Computerkunst.



Rekursion

Voraussetzungen für korrekte Anwendung:

- Existenz eines wirksamen Abbruchkriteriums.
- Die Rekursion muß zu Eigenwerten des untersuchten Systems führen.

Beispiel: $x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{x}}}}$

