

Vorlesungsmaterial von einem Seminarvortrag
von
Prof. Dr. Horst Völz

Zur Vielfalt von Entropie

Dieses Material beruht auf Teilen aus dem Buch

Völz, H.: Völz, H.: Wissen - Erkennen - Information. Allgemeine Grundlagen für
Naturwissenschaft, Technik und Medizin. Shaker Verlag, Aachen 2001

Es ist u.a. auch vollständig auf der CD enthalten

Völz, H.: Wissen - Erkennen - Information. Datenspeicher von der Steinzeit bis
ins 21. Jahrhundert. Digitale Bibliothek Bd. 159, Berlin 2007

Der Inhalt wurde wesentlich ergänzt, auf den neuesten Stand gebracht und die
Bilder farbig umgesetzt

Bei Angabe der Quelle ist das Material zum privaten Gebrauch voll nutzbar
Bei kommerzieller Nutzung bzw. in Publikationen usw. ist eine Abstimmung mit mir notwendig
Bilder sind in höherer Qualität ca. 2000×3000 Pixel oder *.cdr Version 12 verfügbar

Dieses Material wurde heruntergeladen von
aes.cs.tu-berlin.de/voelz bzw. <http://www.medienwissenschaft.hu-berlin.de/vlz>
Email: [hvoelz\(at\).fpk.cs.tu-berlin.de](mailto:hvoelz(at).fpk.cs.tu-berlin.de) bzw. [h.voelz\(at\)infocity.de](mailto:h.voelz(at)infocity.de)
Prof. Dr. Horst Völz, Koppenstr. 59, 10243 Berlin, Tel./Fax 030 296 31 07

Zur Vielfalt von Entropie

H. Völz
HU 17.6.09

Inhalt

1. Einführung in das Problem
2. Notwendige Grundlagen der Thermodynamik
3. Notwendige Grundlagen der SHANNON-Theorie
- 4 Weitere Entropien
5. Vergleich, Zusammenfassung und Schlussfolgerungen
6. Anhang: Geschichte, Literatur- und Namensverzeichnis (wird nicht vorgetragen)

1. Homonyme

Es gibt Wörter (Homonyme), die mehrere unterschiedliche Bedeutungen besitzen

Griechisch **homonymía** Gleichnamigkeit

Im Deutschen sind mehrere Hundert bekannt, z. B.:

Bauer = ländlicher Beruf $\Leftrightarrow$ Käfig für einen Vogel

Bogen = gebogene Linie $\Leftrightarrow$ gewölbtes Tragwerk $\Leftrightarrow$ Waffe mit Pfeilen $\Leftrightarrow$ Schreib-/Packpapier $\Leftrightarrow$ Zeichen bei Noten

Als Kinder benutzten wir die Homonyme zum **Teekessel-Rate-Spiel**

Teekessel 1	Teekessel 2
Ich bin überwiegend aus Holz	Ich bin belebt
Ich mache Musik	Ich werde oft bewegt
Ich stehe auf einer Bühne	Ich enthalte viele Federn
Mich betätigt ein Künstler	Ich diene zum Fliegen

2. Entropie betrifft:

Physik und Chemie	Informations-, u. Nachrichtentechnik
Hauptsätze der Thermodynamik	SHANNON-Theorie
Wandlung von Wärme in mechanische Energie	Übertragung von Signalen, Information
CARNOT-scher Kreisprozess	Signalfluss, Kanalkapazität, Codierung
Dampfmaschine, OTTO-, DIESEL-Motor	Komprimierung, Fehlerkorrektur, Kryptographie
Entropie hat Symbol S	Entropie hat Symbol H
Maß-Einheit = J/K	Maß-Einheit = Bit/Symbol (Zeichen)

In beiden Fällen ist eine Messung mit Zahlenangaben möglich

3. Auftretende Problemen

Leider sind die Grundlagen beider Gebiete kompliziert und daher nicht allgemein geläufig

So kommt es teilweise – gar nicht so selten – zu beachtlichen „Fehlinterpretationen“ und Schlussfolgerungen

So werden z.B. trotz der unterschiedlichen Maßeinheiten folgende Varianten durchaus ernsthaft betrachtet:

- beide Entropien werden gleich gesetzt $\rightarrow S = H$ oder
- die Summe ihrer Maßzahlen soll immer erhalten bleiben $\rightarrow S + H = \text{konstant}$

Um dies und weiteres zu verstehen sind vor allem zwei **Fragen** zu klären

1. Wie ist es dazu gekommen, dass beide Größen mit dem **gleichen Namen** belegt wurden?
2. Wie lassen sich die **Fehler erklären**?

Zu 1.: Ursprünglich hatte BOLTZMANN auch H verwendet, heute noch als H -Theorem bekannt

WIENER soll über einen Analogschluss SHANNON vorgeschlagen haben, H Entropie zu nennen

BRILLOUIN schlug für SHANNON-Entropie begriff **Neg-Entropie** vor

Zu 2.: Mehrere **Formeln** beider Gebiete enthalten ähnlich verknüpft

Wahrscheinlichkeit (als W bzw. p) und **Logarithmus** ($\ln$ bzw. $\lg$)

Es lässt sich eine minimal notwendige **Energie je Bit** berechnen: $E/\text{Bit} = k \cdot T \cdot \ln(2)$

Ähnliche Betrachtungen führte bereits 1929 SZILLARD mittels eines Dämons durch

Beide Entropien betreffen irgendwie eine Unordnung (Unkenntnis)

4. Wie und warum man absichtlich Fehler macht

Den Physiker und Meteorologen HEINRICH WILHELM DOVE (1803 – 1879) fragte einmal ein Mann nach seinem öffentlichen Vortrag, woher es komme, dass es in den Straßen von Berlin im Winter immer fünf Grad Kälte sei als auf dem Felde. Er wollte sich aber nicht mit ihm streiten. Schließlich wollte der Mann ja auch nur eine Erklärung für seine falsche Beobachtung. Folglich sagte er:

„Wegen des Heizens in den Häusern flüchte die Kälte aus denselben auf die Straße und käme dort dichter zusammen. Der Mann war zufrieden und erzählt's auf meinen Namen weiter. Meinetwegen. Ich bin ihn wenigstens los.“

Ähnlich: **Schwarze Schuhe** drücken mehr als weiße, denn sie absorbieren mehr Strahlung, die sie in Strahlungsdruck umwandeln

Teil 2 Notwendige Grundlagen der Thermodynamik

5. Geschichte Thermodynamik

- 1738 BERNOULLI: Wärme ist **ungeordnete Bewegung** der Moleküle
- 1824 CARNOT definiert idealen **Kreisprozess**, **Wirkungsgrad** $\eta = 1 - T_2/T_1$
- 1843 MAYER formuliert Energie-Erhaltungssatz, es folgen JOULE und HELMHOLTZ
- 1848 KELVIN schlägt **absoluten Nullpunkt** vor
- 1851 KELVIN (= THOMSON) formuliert **2. Hauptsatz**, Zeitrichtung
- 1854 CLAUSIUS definiert **Entropie** $dS = dQ/T$
- 1859 CLAUSIUS, MAXWELL, KELVIN und BOLTZMANN entwickelten **kinetische Gastheorie**. Auch im (dynamischen) **Gleichgewicht** gibt es immer statistische Schwankungen
- 1859 MAXWELL bestimmt **Geschwindigkeitsverteilung** der Moleküle
- 1865 BOLTZMANN entwickelt mikroskopische, **atomistische Erklärung** der Entropie (*H*-Theorem)
- 1867 **MAXWELL-Dämon** mit Tür
- 1872 BOLTZMANN leitet die zweite Formel für **Entropie** ab: $S = k \cdot \ln(W)$.
- 1900 (ca.) **Moleküle** werden als existent **nachgewiesen**
- 1906 NERNST **3. Hauptsatz**, Konvergenz gegen absoluten Nullpunkt, **Wärmetod**
- 1907 EHRENFEST-Modell (Hund – Flöhe)
- 1929 **Szilard-Modell** (Dämon) zur Transformation von Wärmeenergie in mechanische

6. Hauptsätze Thermodynamik

0. Hauptsatz

Streben nach Gleichgewicht, es stellt sich immer nach hinreichend langer Wartezeit ein
In geschlossenen Systemen gleichen sich Temperaturdifferenzen immer aus
Makroskopische Größen, wie Druck, Temperatur, Volumen usw. ändern sich dann nicht mehr

1. Hauptsatz

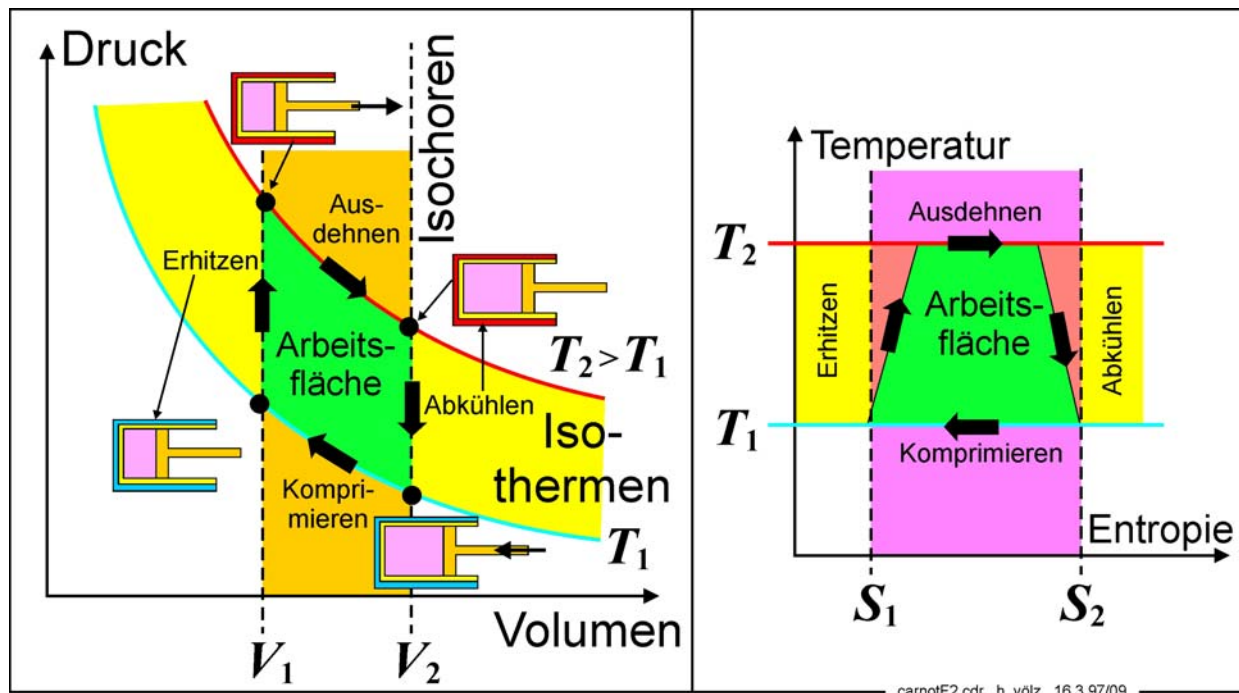
Betrifft **Energieerhaltung** $U = \Delta A + \Delta Q$; Änderung der inneren Energie (Zustand)
 A = Arbeit = mechanische Energie, Q = Wärme (Energie), U = Gesamt-Energie
Definition des CARNOT-Prozess
Mechanische Arbeit ist jederzeit vollständig in Wärme umwandelbar, aber nicht umgekehrt, Zeitpfeil
Ein Prozess ist dann **reversibel**, wenn er sich fortwährend im thermischen Gleichgewicht befindet
Es gibt kein Perpetuum mobile 1. Art, das dauernd Energie erzeugt, ohne sie der Umgebung zu entziehen

2. Hauptsatz

Es gibt keine natürlichen Prozesse, bei denen die Gesamt-Entropie abnimmt
Irreversibilität der natürlichen Prozesse, **Wärmetod**
Definition der Entropie $\Delta S = \Delta Q/T$, später BOLTZMANN Äquivalenz $S = k \ln(W)$
 W = Wahrscheinlichkeit, T = absolute Temperatur, k = BOLTZMANN-Konstante
Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art, das ständig periodisch Wärme in Arbeit wandelt (nicht beweisbar!)
H-Theorem Boltzmann Die Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle muss durch Stöße solange zunehmen bis die Entropie ein Maximum besitzt.

3. Hauptsatz

Am absoluten Nullpunkt $T = 0$ besitzt ein System keine Anregungsenergie mehr
Absoluter Nullpunkt experimentell nie erreichbar. Dort $T \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta S \rightarrow 0$



8. Das Wort Entropie

wurde von CLAUSIUS geprägt:

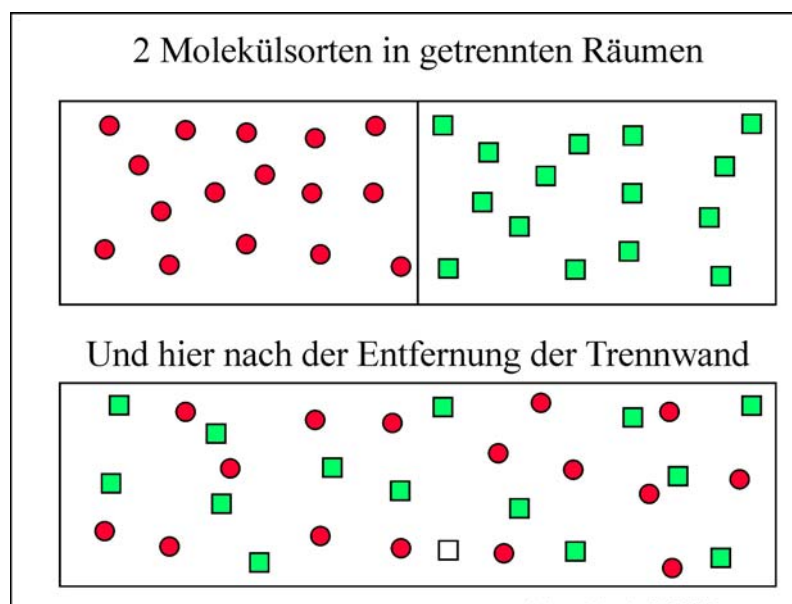
„Sucht man für S (die Entropie) einen bezeichnenden Namen, so könnte man, ähnlich wie von der Größe U (der inneren Energie) gesagt ist, sie sey der Wärme- und Werkinhalt des Körpers, von der Größe S sagen, sie sey der Verwandlungsinhalt des Körpers. Da ich es aber für besser halte, die Namen derartiger für die Wissenschaft wichtiger Größen aus den alten Sprachen zu entnehmen, damit sie unverändert in allen neuen Sprachen angewandt werden können, so schlage ich vor, die Größe S nach dem griechischen Worte »tropaë«, die Verwandlung, die Entropie des Körpers zu nennen. Das Wort Entropie habe ich absichtlich dem Wort Energie möglichst ähnlich gebildet, denn die beiden Größen, welche durch diese Worte benannt werden sollen, sind ihren physikalischen Bedeutungen nach einander so nahe verwandt, daß eine gewisse Gleichartigkeit in der Benennung mir zweckmäßig zu seyn scheint.“

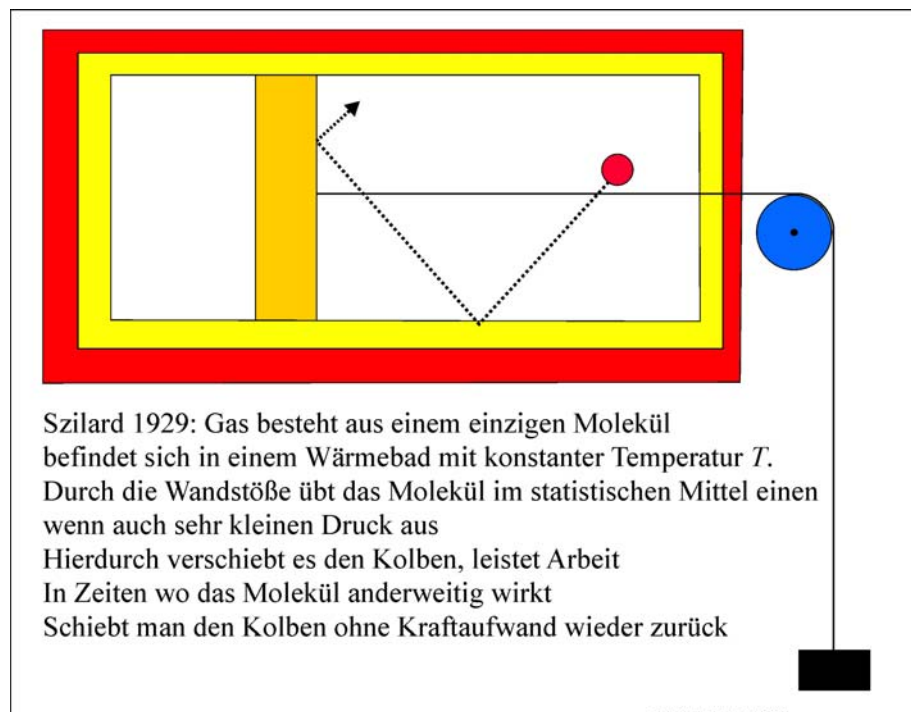
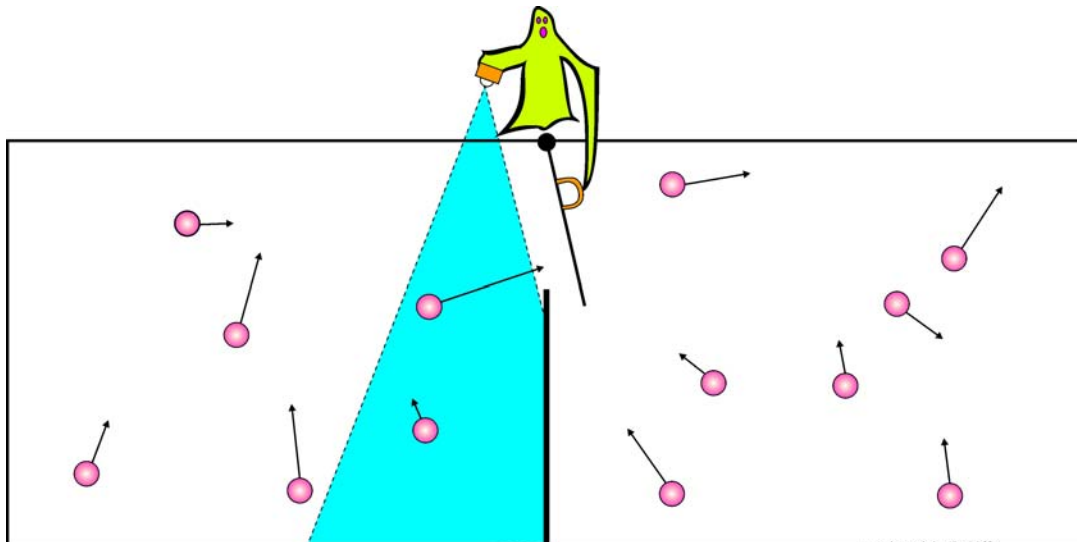
Primitive Veranschaulichungen zur Entropie $\Delta S = \Delta Q/T$

Stromkosten vom Kühlschrank mit Innen-Temperatur T : $\text{kWh}/T \Rightarrow$ je tiefer T desto mehr Stromkosten

Kalorienbedarf des Menschen 2000 kcal/Tag entsprechen einem dauernden Stromverbrauch von 100 W

Einfluss von Kleidung und Außentemperatur





12. Ableitung der BOLTZMANN-Formel

Mikrozustand

Bestimmt die Eigenschaften einzelner Teilchen

Bei Halbierung des Volumens ist für ein Teilchen die Aufenthalts-Wahrscheinlichkeit $W = \frac{1}{2}$

Makrozustand

Charakterisiert die Gesamteigenschaften des Systems mit N Teilchen

Dafür, dass sich alle N im halben Volumen befinden gilt $W = (\frac{1}{2})^N$

Werden nun zwei Systeme mit W_1 und W_2 sowie S_1 und S_2 vereinigt, dann muss gelten

$$W = W_1 \cdot W_2 \text{ und } S = S_1 + S_2$$

Dies ist macht aber den Logarithmus bezüglich der Wahrscheinlichkeiten $\ln(W)$ notwendig

Das ist außerdem vorteilhaft, weil die Wahrscheinlichkeit für wachsendes N sehr schnell extrem klein wird

Für eine Übereinstimmung mit der „alten“ Entropie ist noch die BOLTZMANN-Konstante erforderlich

$$k = 1,38065812 \dots \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$S = k \cdot \ln(W)$$

13. Kritik an BOLTZMANNs thermodynamische Statistik

1. Seine **Atom**-Annahme, die bereits in der Chemie durch DALTON galt, Widerspruch vor allem von MACH und OSTWALD (Ein Atom hat noch keiner gesehen!)
2. Seine **statistische** Irreversibilität und Ableitung des 2. Hauptsatzes aus reversiblen Mikrozuständen, Widerspruch vor allem von POINCARÉ und ZERMELO

Die ständige Kritik führte schließlich zum Freitod von BOLTZMANN am 05.09.1906

Heute sind beide Aspekte wegweisend für statistische Physik

PLANCK stellt dazu später fest, dass sich eine neue wissenschaftliche Wahrheit normalerweise

„nicht in der Weise durchzusetzen pflegt, dass ihre Gegner überzeugt werden und sich, als belehrt erklären, sondern vielmehr dadurch, dass die Gegner allmählich aussterben und daß die heranwachsende Generation von, vornherein mit der Wahrheit vertraut gemacht wird“.

14. Die Zeitrichtung

Unmittelbar erleben wir eine Gerichtetheit der Zeit (Zeitpfeil).

Bei einem Film können wir schnell feststellen, wenn er rückwärts abgespielt wird

Aussage: Im Gleichgewicht hat das System seinen Anfangszustand vergessen

Der Zeitpfeil nimmt ab, je näher die Gleichverteilung ist, schließlich gibt es keine physikalische Zeit mehr.

Um 1907 schufen hierzu TATIANA und PAUL EHRENFEST ein Gedankenexperiment, das damals von vielen Physikern rechnerisch untersucht wurde

In der anschaulichen Version werden die Urnen $\Rightarrow$ Hunde, die Steine $\Rightarrow$ Flöhe ersetzt

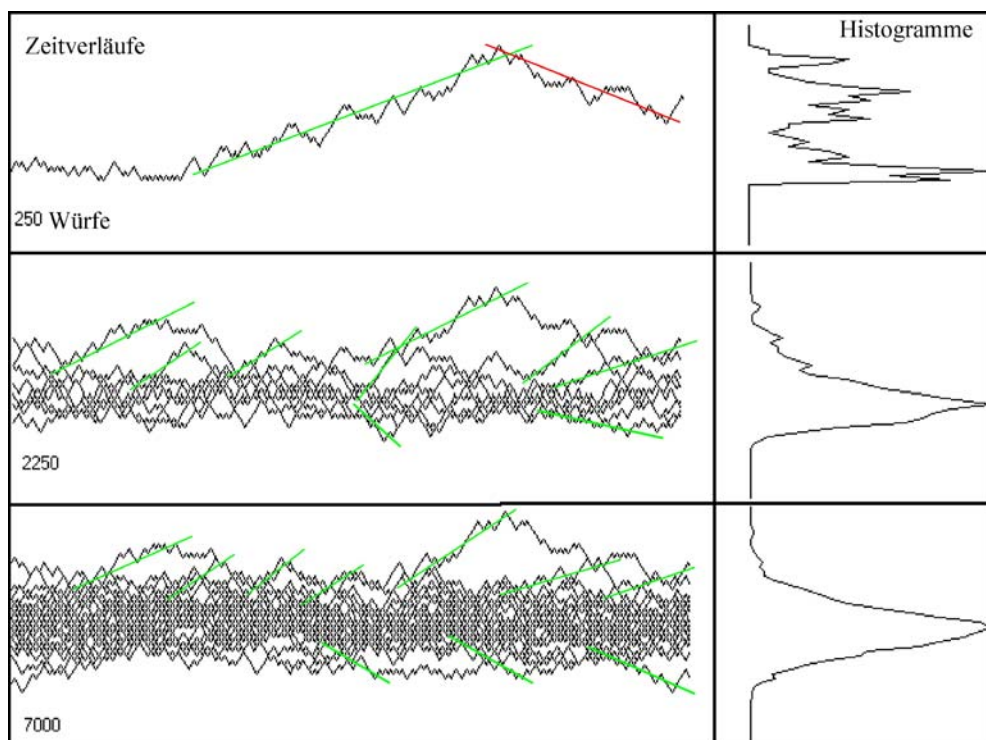
Daher ist es als Spiel „Hund-Flöhe-Modell“ bekannt

Grundlage: 2 Hunde (Urnen), n nummerierte Flöhe (Steine) und einen Zufallsgenerator mit n Zahlen.

Regel: Wird die Zahl $0 < x \leq n$ gewürfelt, so hat der Floh „ x “ den Hund zu wechseln.

Grundsätzlich lassen sich dann zwei wesentlich unterschiedliche Ergebnisse feststellen:

1. Gemittelt über eine hinreichend lange Zeit befindet sich auf jedem Hund ziemlich genau die Hälfte der Flöhe. Bei einer großen Versuchszahl ist die Abweichung sehr klein, bei der LOSCHMIDT'schen Zahl z.B. $\approx 10^{-20}$.
2. Es treten jedoch immer wieder Zeitausschnitte auf, die sich von der Gleichverteilung entfernen. Sie widersprechen als „Raum-Zeit-Oasen“ der Tendenz des 3. Hauptsatzes. Im folgenden Bild sind nur einige zu sehen, die meisten sind durch die Vielzahl der Punkte bei Gleichverteilung verdeckt.



16. Notwendige Energie für eine Messung, Entscheidung

Wahrscheinlichkeit W für die Zustände, k Boltzmann-Konstante

$$S = k \cdot \ln(W)$$

zweifach entartetes System: zwei Energiemulden in denen eine Kugel liegen kann

Vor Messung ist nicht bekannt, welcher Zustand (Kugel in welcher Energiemulde)

Wahrscheinlichkeit für jede Mulde $W = \frac{1}{2}$

Nach Messung ist gewählte Mulde bekannt $W = 1$. Folglich ist für die Messung Energie erforderlich.

Sie errechnet sich aus der Differenz ΔS der beiden Entropien und Multiplikation mit der absoluten Temperatur

$$\Delta E / \text{Entscheidung} = \Delta S \cdot T = k \cdot T \cdot [\ln(1) - \ln(0,5)] = k \cdot T \cdot \ln(2)$$

Der Wert lässt sich auch **aus der SHANNON-Entropie** herleiten

Teil 3. Notwendige Grundlagen der Shannon-Theorie

17. CLOUDE ELWOOD SHANNON

30.04.1916 - 24.2.2001

A Mathematical Theory of Communication) Bell Systems Technical Journal 27 (Juli 1948) S. 379-423 und (Oktober 1948) S.623 - 656. (**eingereicht 24.3.1940**).

(Ebenfalls in: University Illinois Press 1949). Teil 2 auch: Communication in the Presence of Noise. Proc. IRE 37 (1949) pp. 10 - 20, (eingereicht am 24.3.1940), Übersetzt in:

Mathematische Grundlagen der Informationstheorie. R. Oldenbourg, München - Wien, 1976; ISBN 3-486-39851-2
WEAVER sollte nicht erwähnt werden, da völlig unwissenschaftlich u. z. T. sogar falsch

Zufallsgenerator mittels 4 Klassen von Karten			
 Z, Zahl 16 Karten, 50%	 M, männlich 8 Karten, 25%	 D, Dame 4 Karten, 12,5%	 A, Ass 4 Karten, 12,5%

kartenshannon.cdr h. vözl 3.11.00

19. Ein besonderes Kartenspiel

- Häufig wird wiederholt: Mischen → Karte ziehen, nicht zeigen
- Über mit Ja/Nein beantwortbare Fragen jeweilige Klasse erraten

Ziel

Im statischen Mittel sind mit möglichst wenig Fragen möglichst viele Klassen der Karten bestimmen

Dies erfordert eine Spielstrategie

Bezüge zur Informationstheorie

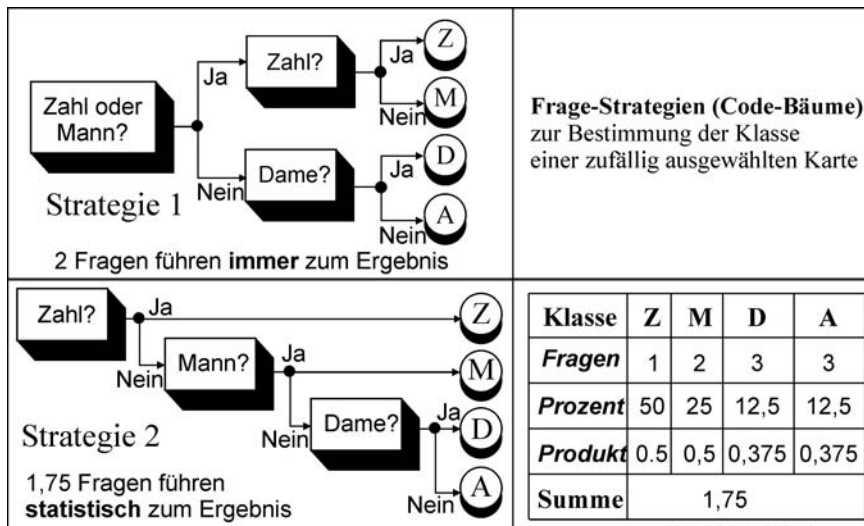
Kartenauswahl	⇔	Signalquelle
Raten	⇔	Signalerkennung
Strategie	⇔	Codebaum

Bit

Entspricht einer Ja/Nein-Frage = Antwort beseitigte Unsicherheit

1,75 Bit/Karte als Entropie = theoretisch minimaler Ja/Nein-Aufwand um ein Zeichen zu erkennen

Fragestrategie ist Codierung = konstruktiver Teil der Informationstheorie



21. Ergebnis der Codierung

Von n Symbolen mit Wahrscheinlichkeit p_i

Theorie → Entropie H	Anwendung → Codeaufwand A
jedes Symbol liefert Anteil $-\text{ld}(p_i) = 1/\text{ld}(p_i)$	Zu jedem Symbol gehört Code-Länge l_i
$H = - \sum_{i=1}^n p_i \cdot \text{ld}(p_i)$	$A = \sum_{i=1}^n p_i \cdot l_i$

Es gilt immer $H \leq A$

Die Differenz $R = A - H$ heißt (SHANNON-) Redundanz

Für eine ideale Codierung ist sie 0

Oft wird auch die relative Redundanz benutzt

$$r = \frac{A - H}{H}$$

22. Ableitung der Entropie-Formel

Für 4 Speicherplätze werden unterschieden:

binäre Speicherplätze Symbol-Bits, Signal-Länge	genutzten Zeichen, mögliche Zustände Symbol-Realisierungen, konkrete Signale
$n = \text{ld}(m)$	$m = 2^n$
Bit 1	0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1
Bit 2	0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
Bit 3	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0
Bit 4	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

Ein mögliches Signal ist die Bit-Folge

0101

Folglich sind zu unterscheiden:

- Die **Informationsmenge (n)** entspricht der Anzahl von Speicherplätzen, benutzte Bit-Anzahl
- Die **möglichen Signale (m)** sind spezielle **Varianten** der Information

$$H = n = \text{ld}(m)$$

Die Informationsmenge je Symbol **H** heißt Entropie

Es wird der binäre Logarithmus $\text{ld} = {}_2\log$ genutzt

Für **gleichwahrscheinliche Signale** gilt $p = 1/m$ (Wahrscheinlichkeit)

$$H = 1/\text{ld}(p) = -\text{ld}(p)$$

Negatives Vorzeichen notwendig, weil für $x < 1 \Rightarrow \log(x) < 0$ folgt

23. Zweiter Teil der Ableitung

Signale treten jedoch meist mit Wahrscheinlichkeiten **p_i** auf.

Daher **statistische Mittelwertbildung** mittels Summe Σ erforderlich
 Außerdem zusätzlich sinnvoll eine **Bewertung** mit Gewicht p_i

$$H = - \sum_{i=1}^m p_i \cdot \lg(p_i)$$

Informationen werden **addiert**

Abhängige **Wahrscheinlichkeiten** werden **multipliziert**

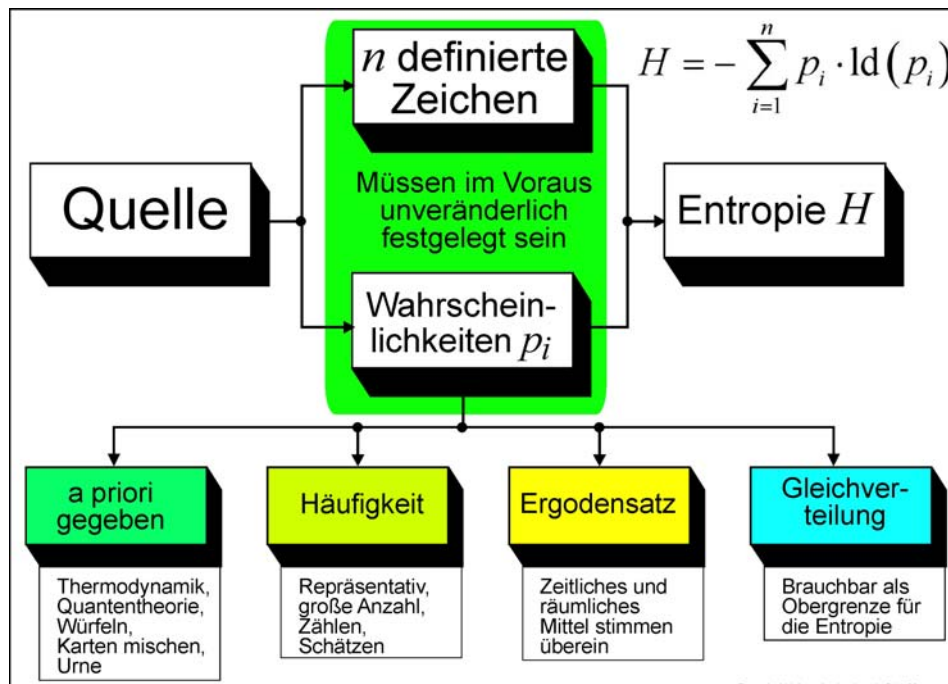
Vgl. Thermodynamische Entropie nach BOLTZMANN

24. Voraussetzungen für SHANNON-Entropie

- Existenz genau definiertes Alphabet aus n Symbolen, dürfen nicht nachträglich geändert werden
- Jedes Symbol hat **fixe Wahrscheinlichkeit** p_i

Bemerkungen

1. **Wahrscheinlichkeit apriori**, meist physikalisch bedingt, z. B.: Würfel, Urne, Kartenspiel, Los, Quantentheorie, Thermisches Rauschen
2. **Häufigkeit, a posteriori**, Abzählen, repräsentative Stichproben, Grenzwertsatz n
3. **Gleichverteilung** = oberer Grenzwert für Entropie, Nutzung zur Abschätzung
4. **Ergodensatz beachten**, gleichgroße serielle und parallele Ereignisse



26. Ergodizität

- Nicht ergodische Prozesse sind z. B. Sprachen, deren Statistik in der Zeit ändert
- Zeitlicher Mittelwert muss mit Ensemble-Mittelwert übereinstimmen
- Bei Markow-Prozessen darf
 1. der Graph darf nicht so in Teile zerfallen, dass man nicht zu allen Knoten zurück gelangen kann
 2. muss der größte gemeinsame Teiler aller Zykluslängen (der Zahl Kanten in einer geschlossenen Schleife) gleich 1 sein.
 3. Nichtergodische Quellen, laufen zu Stellen, die Endknoten sind, aus denen der Prozess nicht mehr heraus kann. Problem der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten.

27. Axiomatische Ableitung der Entropie-Formel nach FEINSTEIN

1. $H(p, 1-p)$ ist **stetig** in p mit $0 \leq p \leq 1$ 2 Zeichen
2. $H(0,5, 0,5) = 1$ **Normierung**
3. $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ist unabhängig von der **Reihenfolge** n Zeichen
4. Verfeinerungstheorem: Zerlegung $p_n = q_1 + q_2$ $n \rightarrow n+1$ Zeichen

dann: $H(p_1, p_2, \dots, q_1+q_2) = H(p_1, p_2, \dots, p_n) + p_n \cdot H(q_1 / p_n + q_2 / p_n)$

Hinweise für die Ableitung

- $H(1) = 0$: **Gewissheit**
- n **gleichwahrscheinliche** Symbole: $p_i = 1/n$: $H(n_1) > H(n_2)$ wenn $n_1 > n_2$
- zwei **unabhängige** Urnenversuche: $p(A; B) = p(A) \cdot p(B) \rightarrow H(A; B) = H(A) + H(B)$
erfordert den **Logarithmus**, dessen **Basis** noch unbestimmt ist
- **ein Versuch** mit $p = 1/n \rightarrow h = c \cdot \log(1/n)$ folglich bei Summierung Faktor p notwendig
 $h = p \cdot \log(1/n) = -p \cdot \log(p)$
- Durch **Summierung** über alle Versuche folgt also $H = - \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log(p_i)$
- Wegen **Normierung** (oben 2.) kommt nur noch den **binäre Logarithmus** in Betracht

28. Beispiel für das Verfeinerungstheorem

Fall K_0

Klasse	Karten	p	$\log(p)$	$-p \cdot \log(p)$
Zahl	7, 8, 9, 10	0,5	-1	0,5
Männlich	Buben, Könige	0,25	-2	0,5
Sonstige	Damen, Asse	0,25	-2	0,5

Entropie = 1,5 Bit/Karte

Nun wird „Sonstige“ zerlegt in **Weiblich** + **Aß**

Klasse	Karten	p	$\log(p)$	$-p \cdot \log(p)$
Weiblich	Damen	0,5	-1	0,5
Aß	Asse	0,5	-1	0,5

Zwischen-Ergebnis = 1 (x0,25)

Für die verfeinerte Klasse folgt deshalb wieder:

Klasse	Karten	p	$\log(p)$	$-p \cdot \log(p)$
Zahl	7, 8, 9, 10	0,5	-1	0,5
Männlich	Buben, Könige	0,25	-2	0,5
Weiblich	Damen	0,125	-3	0,375
Sonstige	Aß	0,125	-3	0,375

Ergebnis = 1,75 Bit/Karte

29. Entropie kontinuierlicher Signale

Nicht ganz ernst gemeint von ZEMANEK, richtige Ableitung SHANNON ist komplizierter

Einführung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\Delta x \rightarrow dp(x)$

Es werden n Intervalle Δx gewählt, die eine Wahrscheinlichkeit $p_n(\Delta x)$ besitzen. Für die Entropie gilt dann

$$H(n, \Delta x) = - \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=0}^n p_i(\Delta x) \cdot \Delta x \cdot \log(p_i(\Delta x) \cdot \Delta x)$$

Grenzübergang zum Integral (Produkt unter dem Logarithmus in die Summe zerlegen)

$$H(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot \log(p(x)) \cdot dx - \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=0}^n p_i(\Delta x) \cdot \log(p_i(\Delta x)) \cdot \Delta x$$

Der zweite Teil divergiert wegen:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \log(\Delta x) \rightarrow -\infty$$

Daher wird der erste Term als relative Entropie bezeichnet

$$h(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot \log(p(x)) \cdot dx$$

In der Praxis gibt es neben Nutzsignal immer eine Störung. Für sie gilt ebenfalls der Grenzübergang
Durch Differenzbildung heben sich die beiden divergierenden ∞ -Terme auf (!)

$$H(x) = h_{\text{Nutz}}(x) - h_{\text{Stör}}(x)$$

Gaußsche Verteilungen bei Signal und Störung ergibt dann

$$H = \text{ld} \left(\frac{P_N + P_S}{P_S} \right)$$

Mögliche Interpretation: Es gibt m Pegel mit unterscheidbaren Amplitudenstufen

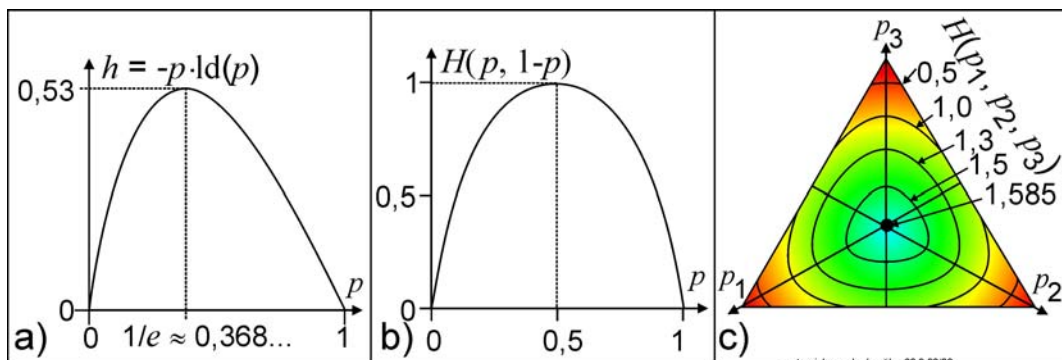
$$m = \frac{P_N + P_S}{P_S}$$

30. Wichtige Kenngröße der SHANNON-Theorie

Entropie	Kanalkapazität
diskret $H = \sum p_i \cdot \text{ld}(p_i)$ kontinuierlich $H = \text{ld} \frac{P_{\text{nutz}} + P_{\text{st}}}{P_{\text{st}}}$	$C = 2 \cdot B \cdot H$

Vergleich der Wirkungsgrade

SHANNON	CARNOT
Redundanz gegenüber Entropie bzw. Kanalkapazität	Verlust gegen idealen Kreisprozess



32. Goldener Schnitt $\Leftrightarrow$ Auffälligkeit (H. FRANK 1965)

Goldener Schnitt wird mit Zirkel und Lineal konstruiert;
Pentatonik der Griechen

Grundlinie: Maxor = Maxor : Minor: $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618033988$

Gilt nur für Bildhaftes, Näherung 2 : 3, hat ästhetische Wirkung

Auffälligkeit folgt aus der Physiologie
Wahrnehmung, Empfindung Y und Reiz-Energie R hängen über Logarithmus zusammen

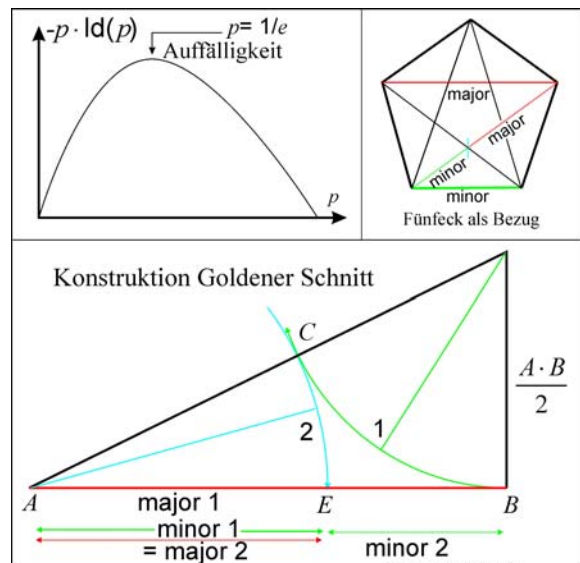
$$Y = K \cdot \log(R)$$

Gelten also für alle Sinnes-Modalitäten

Term $-p \cdot \text{ld}(p)$ hat ein Maximum bei

$$p = 1/e \approx 0,367879441, 1-1/e = 0,632120558$$

TEXT EDGAR ELLEN POE: von 24 Vokalen 8-mal das **e** in:



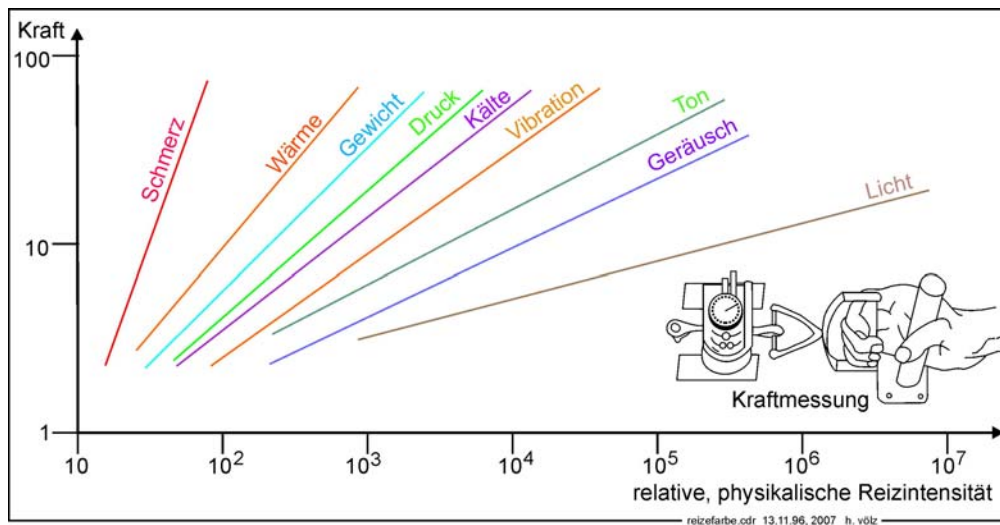
Hear the **sledge**s with the **bells**, silver **bells**!

What a world of **merriment** their **melody** foret**ells**!

Taktverlagerungen bei Jazz und BACH 3. Satz 5. Brandenburgisches Konzert (310 Takte 124 Synkopen)

Iphigenie von AMSELM FEUERBACH, und Blaue Pferde MARC

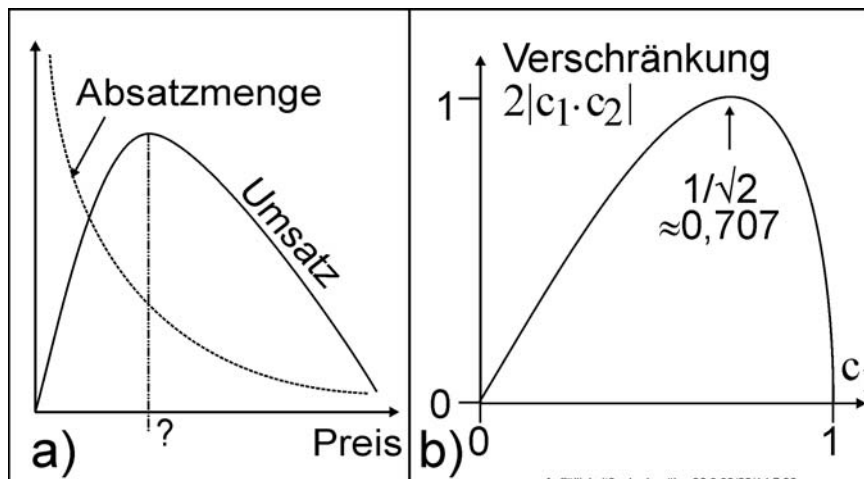
MOLES Kaufhaus $\Rightarrow$ Waren



Franz Marc: Turm der blauen Pferde 1913, 200*130 cm



Anselm Feuerbach: Iphigenie II; 1871 200*132 cm



Teil 4. Weitere Entropien

37. α - und BONGARD-WEIß-Entropie

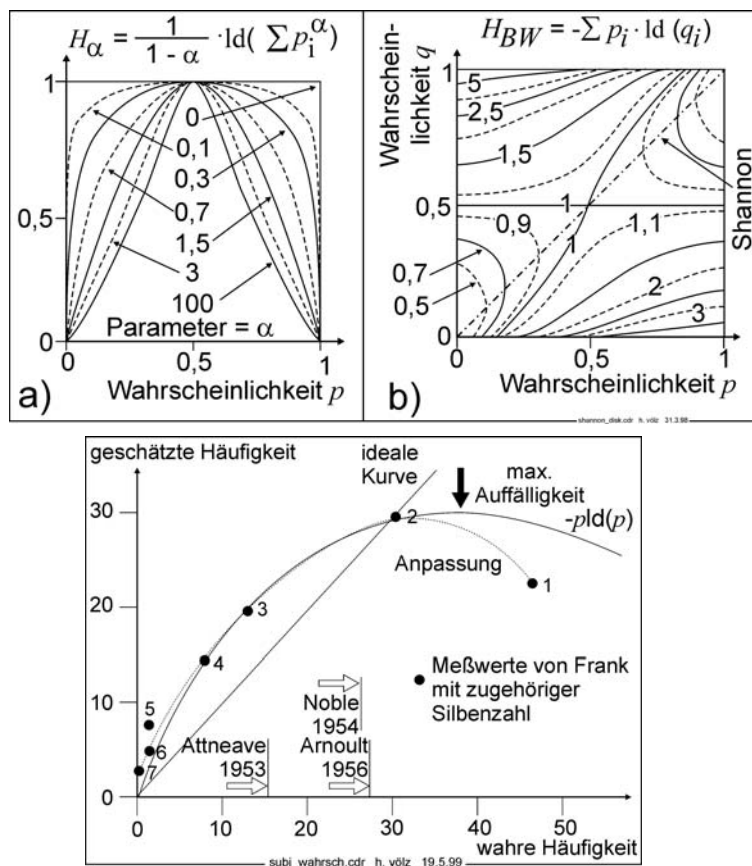
α -Entropie von RENYI für $\alpha = 1$ Shannon-Entropie

$$H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \ln \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right) \text{ für zwei Werte gilt } H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \left[p^\alpha + (1-p)^\alpha \right]$$

BONGARD-WEIß-Entropie benutzt zusätzlich subjektive Wahrscheinlichkeit q_i

$$H_{BW} = - \sum_{i=1}^n q_i \cdot \ln(p_i)$$

CHURCHILL: zur Statistik: Bikini zeigt fast alles, verhüllt das Wesentliche
Ich glaube nur eine Statistik, die selbst gefälscht habe



40. KOLMOGOROFF-Entropie K (1959)

K ist ein Maß für den Grad des Chaos,

Es gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, welche benachbarten Orte im nächsten Schritt erreicht werden

Es können so unterschieden werden:

- $K = 0$ deterministische Bewegung
- $K = \infty$ vollkommen stochastische Bewegung
- $K = \text{positiv und endlich}$; deterministisches Chaos; es gibt einen seltsamen Attraktor

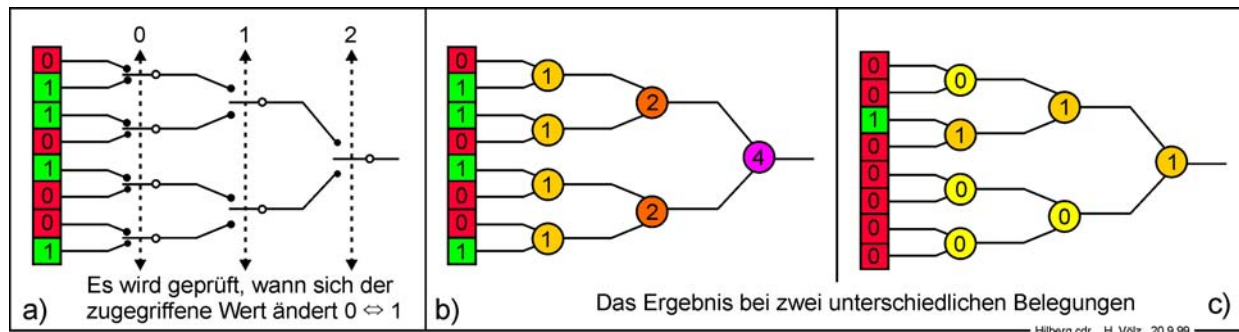
Leider ist keine Normierung bekannt. Mit K ist aber eine Aussage zur möglichen Vorhersagezeit T gegeben:

$$T \sim \frac{1}{K} \cdot \log \left(\frac{1}{l} \right)$$

Darin ist l die geforderte Genauigkeit.

Methode ist auch für Objekte anwendbar. Der Wert ist dann so groß, wie kleinstmögliche Beschreibung

41. HILBERG-Entropie



42 CARNAP-Entropie

Geht von Extension und Intension bei Begriffen aus, um so auch Semantik zu berücksichtigen

Extension	Intension
Objektbezug, (Sachbezug)	Abbildbezug (Begriffsinhalt)
- etwa Begriffsumfang - gilt für Individuen und Klassen, auf die das Prädikat zutrifft - extensionale Beziehungen untersucht die Prädikatenlogik	- etwa Begriffsinhalt - erfasst die Eigenschaft der Objekte mit einem Prädikat - ist nur im Gedächtnis vorhanden.

Entsprechend werden induktive bzw. logische Wahrscheinlichkeiten eingeführt
Dazu werden Aussagenpaare benötigt

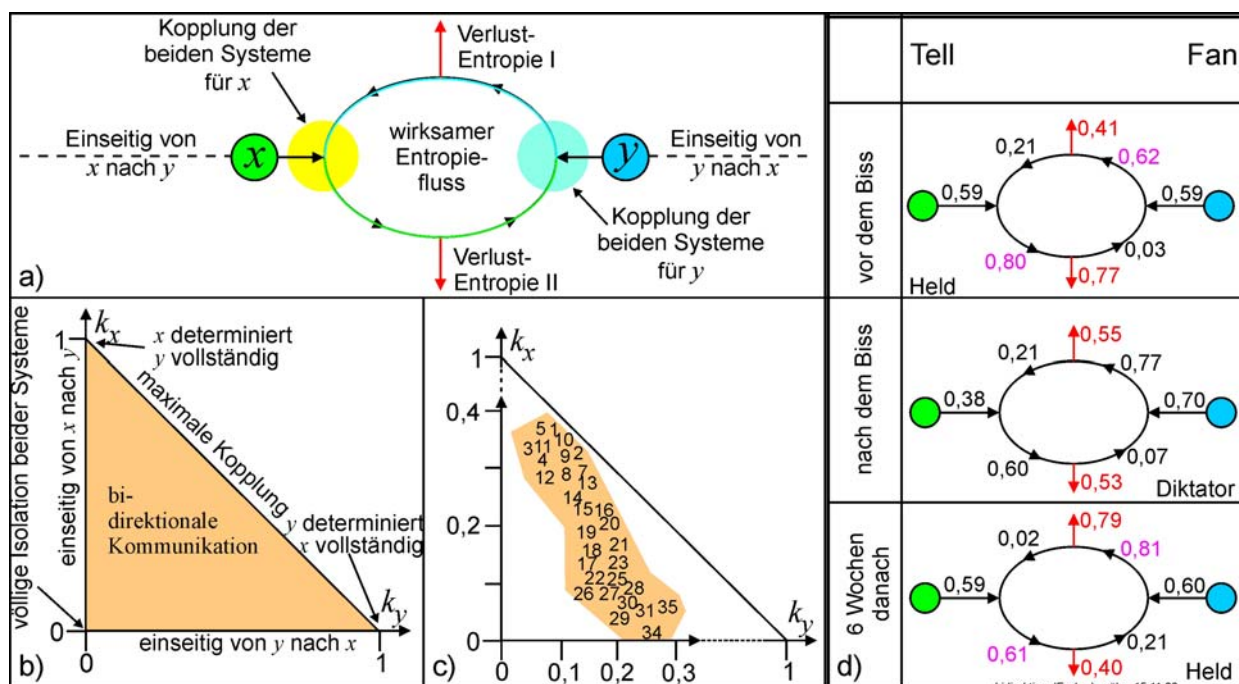
- Hypothese h für das Eintreten von Ereignissen
- Hinweise (Grundlagen) e für die Wahrscheinlichkeit aus Vorkenntnissen

$$\inf(h|e) = \lg p(e) - \lg p(e|h), \text{ cont}(h|e) = p(e) - p(e|h),$$

cont = Maß für die semantische Information; inf = für den Überraschungswert

Entropie hat kaum praktische Bedeutung erlangt, schließlich hat sich sogar CARNAP von ihr getrennt
Annähernd so benutzt bei Hauffe für Gültigkeit von Theorien

43. Bidirektionale Information



Teil 5. Vergleich, Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

44. Entropie-Vergleich

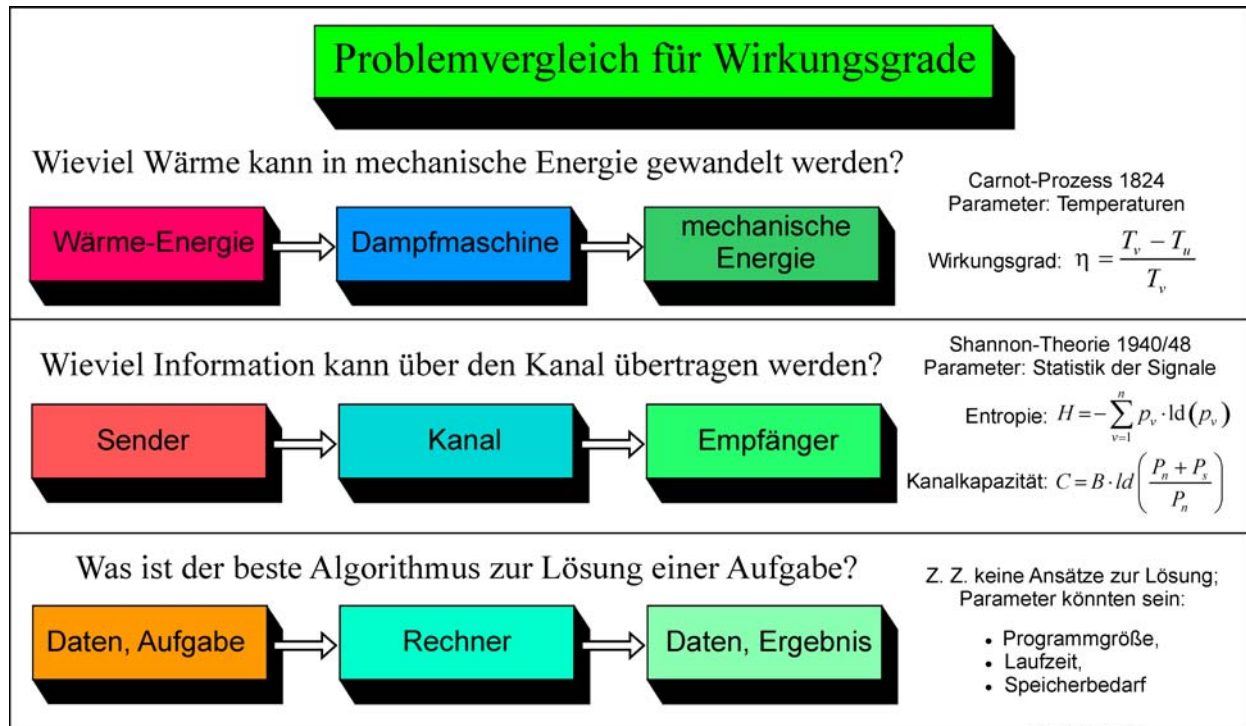
	Thermodynamik	Informationstheorie
Kontinuierlich	$dS = dQ/T$	$H = \text{ld} \left(\frac{P_N + P_S}{P_S} \right)$
Diskret	$S = k \cdot \ln(W)$	$H = - \sum_{i=1}^n p_i \cdot \text{ld}(p_i)$

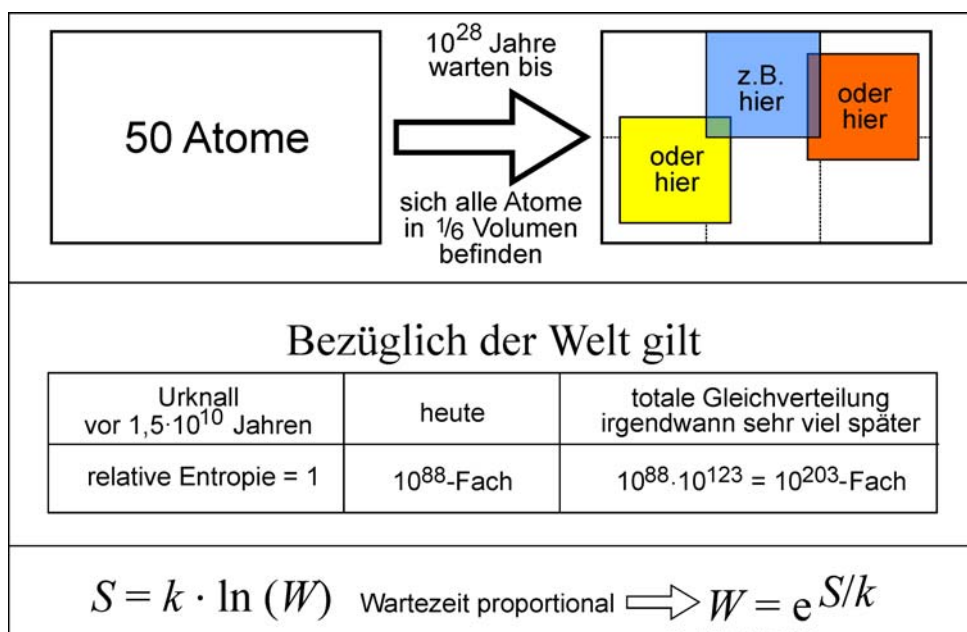
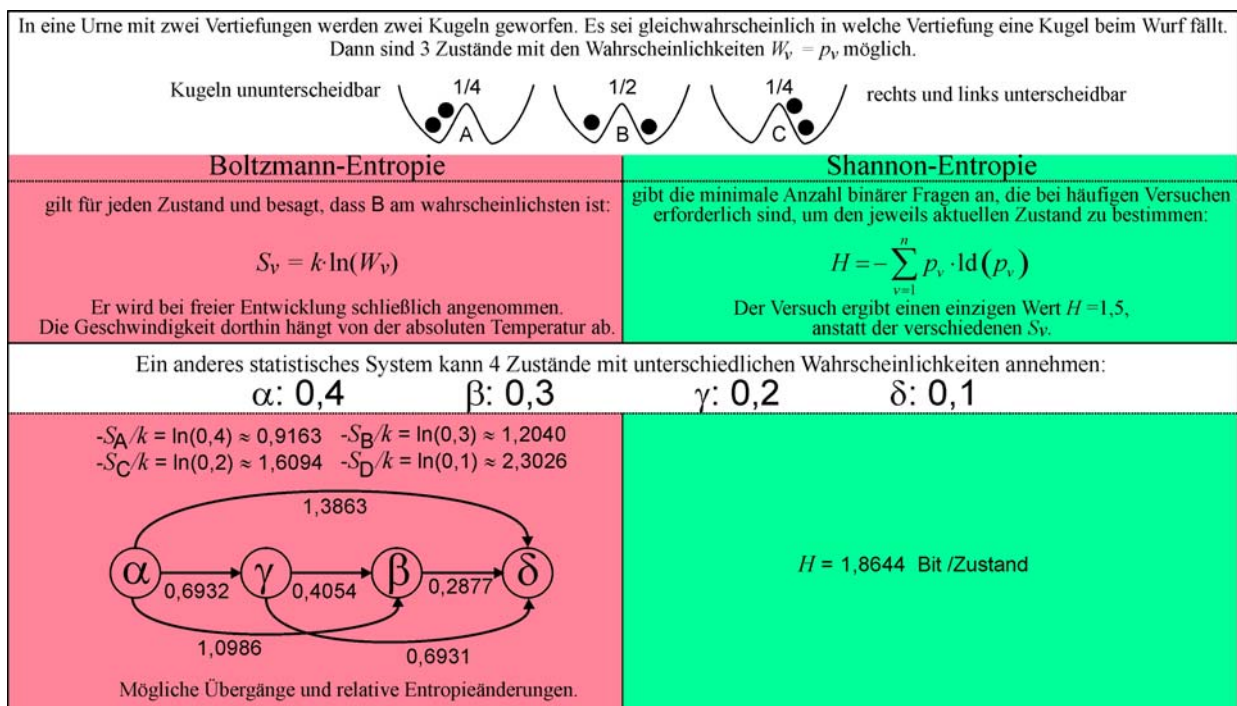
$$\text{RENYI: } H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \text{ld} \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right)$$

$$\text{BONGARD-WEI\ss: } H_{BW} = - \sum_{i=1}^n q_i \cdot \text{ld}(p_i)$$

$$\text{KOLMOGOROFF: } T \sim \frac{1}{K} \cdot \log \left(\frac{1}{l} \right)$$

$$\text{CARNAP: } \inf(h|e) = \lg p(e) - \lg p(e|h), \text{ cont } (h|e) = p(e) - p(e|h),$$





Teil 6. Anhang: Geschichte, Literatur- und Namensverzeichnis

48. Ergänzende Entropie-Geschichte

1824	CARNOT: Kreisprozess
1854	Entropie-Begriff; 2. Thermodynamischer Hauptsatz
1857	BOLTZMANN: $S = k \cdot \ln(W)$
1929	LEO SZILARD: Physik Zusammenhang von Information und Entropie
1933	KOTELNIKOW: Informationstheorie + Abtasttheorem
1940	24.3. Eingangsdatum der <i>Shannon</i> -Arbeit im JIRE
1948	J. W. TUKEY benennt kleinste Nachrichteneinheit „bit“ (binary digit)
1949	SHANNON: „Communication in the Presence of Noise“
1954	CARNAP-Entropie
1959	KOLMOGROFF-Entropie
1960	LANDAUER: IBM nicht Messen sondern Löschen von Information benötigt Energie
1962	RENYI: α -Entropie

1963 BONGARD-WEIß-Entropie
 1965 MARKO: bidirektionale Information
 1987 HILBERG deterministische Informationstheorie

49. Literatur

Bar-Hillel, Y., R. Carnap (1953): Semantic information. Brit.J.Sci. Vol. 4, S. 147-157
 Beutelspacher, A.; Petri, B.: Der Goldene Schnitt. BI, Mannheim - Wien - Zürich 1988
 Boltzmann, L.: Zu Herrn Zermolo's Abhandlung „Über die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge“
 Carnap, R.: Einführung in die symbolische Logik. Springer-Verlag, Wien - New York 1954
 Carnot, S.: „Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers und die zur Entwicklung dieser Kraft geeigneten Maschinen“. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig 1909. Nachdruck: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. - G., Leipzig 1982.
 Frank, H.: Kybernetische Grundlagen der Pädagogik. 2. Aufl. Bd. 1 + 2. Agis - Verlag Baden-Baden 1969
 Hauffe, H.: Der Informationsgehalt von Theorien. Springer - Verlag, Wien - New York, 1981
 Hilberg, W.: Die texturale Sprachmaschine als Gegenpol zum Computer. Verlag Sprache und Technik, Groß - Biebrau, 1990
 Kronthaler, E.: Syntaktische, semantische und pragmatische Information. Grundlagen aus Kybernetik und Geisteswissenschaften 10 (1969) 4, 99 - 109
 Marko, H.: Die Theorie der bidirektionalen Kommunikation und ihre Anwendung auf die Nachrichtenübermittlung zwischen Menschen. Kybernetik 3 (1966) 3, 128 - 136
 Marko, H.: Informationstheorie und Kybernetik. In: Fortschritte der Kybernetik. R. Oldenbourg-Verlag, München - Wien 1967. S.9-28.
 Mayer, W.: Grundverhalten von Totenkopffaffen unter besonderer Berücksichtigung der Kommunikationstheorie. Kybernetik 8 (1970) 2, 59-68
 Neuberger, E.: Kommunikation in der Gruppe. R. Oldenbourg-Verlag, München - Wien 1969
 Neuberger, E.: Zwei Fundamentalgesetze der bidirektionalen Information. AEÜ 24 (1970) 5, 209 ff.
 Renyi, A.: Tagebuch über die Informationstheorie. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1982
 Renyi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962
 Shannon, C. E.: Eine mathematische Theorie der Kommunikation. (A Mathematical Theory of Communication) Bell Systems Technical Journal 27 (Juli 1948) S. 379 - 423 und (Oktober 1948) S.623 - 656 (Ebenfalls in: University Illinois Press 1949). Teil 2 auch: Communication in the Presence of Noise. Proc. IRE 37 (1949) pp. 10 - 20, (eingereicht am 24.3.1940), Übersetzt in: Mathematische Grundlagen der Informationstheorie. R. Oldenbourg, München - Wien, 1976;
 Völz, H.: Computer und Kunst. Reihe akzent 87. 2. Aufl. Urania - Verlag Leipzig Jena - Berlin 1990
 Völz, H.: Information I - Studie zur Vielfalt und Einheit der Information. Akademie Verlag, Berlin 1982.
 Völz, H.: Information II, Theorie und Anwendung vor allem in der Biologie, Medizin und Semiotik. Akademie - Verlag Berlin 1983. 365 S., 184 Abb., 60 Tab.
 Völz, H.: Wissen - Erkennen - Information. Allgemeine Grundlagen für Naturwissenschaft, Technik und Medizin. Shaker Verlag, Aachen 2001
 Weiss, P.: Subjektive Unsicherheit und subjektive Information. Kybernetik 5 (1968) 77 - 82
 Zeh, H., D.: Entropie. Fischer Kompakt. Frankfurt/M 2005
 Zemanek, H.: Elementare Informationstheorie. R. Oldenbourg Verlag, München - Wien 1975

50. Daten der Persönlichkeiten

Bach, Johann Sebastian (1685 – 1750)
 Bernoulli, Daniel (1700 – 1782)
 Boltzmann, Ludwig (1844 - 1906)
 Brillouin, Louis (1854 – 1948)
 Carnap, Rudolf (1891 – 1970)
 Carnot, Nicolas Léonard Sadi (1796 – 1832)
 Churchill, Sir Winston Leonard Spencer (1874 – 1965)
 Clausius, Rudolf (1822 - 1888)
 Diesel, Rudolf (1858 – 1913)
 Dove, Heinrich Wilhelm (1803 – 1879)
 Ehrenfest, Paul (1880 – 1933)
 Feuerbach, Amseln (1829 – 1880)
 Frank, Helmar (*1931)
 Helmholtz, Hermann von (1821 – 1894)
 Hilberg, Wolfgang (*1932)
 John Dalton (1766 – 1844)

Joule, James Prescott (1818 – 1889)
Kelvin, Lord of Largs = Sir William Thomson (1824 – 1907)
Kolmogoroff, Andrej Nikolajewitsch (1903 – 1987)
Mach, Ernst (1838 - 1916)
Marc, Franz (1880 – 1916)
Maxwell, James Clerk (1831 - 1879)
Mayer , Julius Robert von (1814–1878)
Mayer, Robert (1814 – 1878)
Moles, André Abraham (1920 – 1992)
Nernst, Walther Hermann (1864 – 1941)
Ostwald, Wilhelm Friedrich (1853 - 1932)
Otto, Nikolaus (1832 – 1891)
Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1858 – 1947)
Poe, Edgar Ellen (1809 – 1849)
Poincaré, Henri (1854 - 1912)
Rényi, Alfred (1921 – 1970)
Shannon, Claude Elwood (1916 – 2001)
Szilard, Leo (1898 – 1964)
Thomson → Kelvin
Wiener, Norbert (1894 – 1964)
Zemanek, Heinz (*1920)
Zermelo, Ernst (1871 - 1953)